SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Martić

Međunarodno istraživanje TEDS - M

DIPLOMSKI RAD

Zagreb, rujan 2014.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO – MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ivana Martić

Međunarodno istraživanje TEDS - M

DIPLOMSKI RAD

Voditeljica rada:

Prof. dr. sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, rujan 2014.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____, predsjednik

2. ____, član

3. ____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1.____________________________________

2.____________________________________

3.____________________________________

SADRŽAJ

UVOD

Temu ovog diplomskog rada odabrala sam kako bih opisala i metodički obradila objavljene zadatke iz TEDS – M istraživanja. Objavljeni zadaci ispituju matematičko metodičko i sadržajno znanje budućih učitelja matematike u nižim i višim razredima osnovne škole.

S ciljem da ovaj diplomski rad bude koristan studentima, odnosno budućim učiteljima i profesorima, svaki od objavljenih zadataka metodički je riješen i detaljno obrazložen.

U prvom poglavlju opisana je struktura TEDS – M istraživanja te dimenzije matematičkog znanja koje se ispituju. Pritom je dana i tablica sadržajnih područja i tema te opis kognitivnih domena prema kojima su zadaci matematičkog sadržajnog znanja bili klasificirani. Nadalje, zadaci koji ispituju matematičko metodičko znanje razvrstani su unutar tri područja, od kojih je svako opisano u tablici.

Ovim poglavljem obuhvaćen je i opis zadataka prema vrsti te izgled ispitnih knjižica, kao i način vrednovanja odgovora ispitanika. Na kraju poglavlja dani su primjeri vrednovanja objavljenih zadataka koji nisu ušli u glavno istraživanje.

Drugo poglavlje obuhvaća objavljene zadatke za buduće učitelje nižih razreda osnovne škole. Svaki od zadataka metodički je riješen te, ukoliko se radi o zadatku višestrukog izbora, objašnjen je izbor distraktora.

Treće poglavlje obuhvaća objavljene zadatke za buduće učitelje matematike viših razreda osnovne škole, uz metodičku interpretaciju kao u prethodnom poglavlju.

Na kraju, htjela bih se zahvaliti svojoj mentorici prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji na uloženom trudu i pomoći prilikom pisanja ovog rada.

1. OPIS TEDS – M ISTRAŽIVANJA

TEDS-M (**T**eacher **E**ducation and **D**evelopment **S**tudy in **M**athematics) je međunarodno komparativno istraživanje o matematičkom stručnom i metodičkom te pedagoškom obrazovanju studenata različitih zemalja koji studiraju na studijima za učitelje primarnog obrazovanja, tj. razredne nastave, te nastavničkim studijima za učitelje matematike u nižem sekundarnom obrazovanju, odnosno višim razredima osnovne škole. Istraživanje je od 2008. godine provela međunarodna asocijacija IEA (**I**nternational Association for the **E**valuation od Educational **A**chievement)[1], a provedeno je u 20 zemalja, odnosno pokrajina s različitih kontinenata i s različitim obrazovnim sustavima i tradicijama. Zemlje sudionice istraživanja TEDS – M 2008 bile su: Australija, Bugarska, Bocvana, Čile, Kineski Tajpeh, Finska, Francuska, Njemačka, Hong Kong, Italija, Republika Koreja, Meksiko, Norveška, Filipini, Singapur, Španjolska, Švicarska, Tajland, Ujedinjeno Kraljevstvo, Sjedinjene Američke Države.

[1] IEA (**I**nternational Association for the **E**valuation od Educational **A**chievement) je nezavisna međunarodna udruga međunarodnih istraživačkih institucija i državnih istraživačkih agencija.

Utemeljeno na rezultatima istraživanja TIMSS[2] i ostalih prethodnih međunarodnih studija učeničkih matematičkih kompetencija, istraživanje TEDS – M 2008 usmjereno je na pripremljenost učitelja za poučavanje matematike u nižim i višim razredima osnovne škole, klasificiranih prema ISCED – u[3] kao primarno i niže sekundarno obrazovanje. U istraživanju su prikupljeni i analizirani nacionalno reprezentativni podatci zemalja sudionica kako bi se ukazalo na sporne probleme te kako bi se poboljšali smjer i praksa u visokoškolskom obrazovanju budućih učitelja i nastavnika matematike. Sastojalo se od tri isprepletene komponente:

- KOMPONENTA I : istraživanja o obrazovnoj politici, školovanju učitelja i nastavnika matematike te društvenom okruženju na nacionalnoj razini.
- KOMPONENTA II : istraživanja o smjerovima u obrazovanju učitelja i nastavnika matematike, institucijama, programima, standardima i očekivanjima o znanju učitelja i nastavnika matematike.
- KOMPONENTA III : istraživanja o matematičkom sadržajnom, metodičkom i ostalom povezanom znanju budućih učitelja primarnog obrazovanja i učitelja matematike u nižem sekundarnom obrazovanju.

Ključna pitanja u istraživanju odnosila su se na veze između ove tri komponente, kao što su veze između smjerova u obrazovanju nastavnika, institucionalne prakse i matematičkih sadržajnih, metodičkih i ostalih rezultata budućih učitelja i nastavnika.

Razvoj okvira za istraživanje TEDS – M bio je suradnički proces koji je trajao gotovo četiri godine, od jeseni 2003. do jeseni 2007. godine. Kako bi osigurali da TEDS – M bude istraživanje s međunarodnom perspektivom, u razvoj istraživačkih instrumenata uključeni su istaknuti matematičari, nastavnici matematike i psihometričari iz zemalja različitih kultura i tradicija u poučavanju matematike.

---

[2] TIMSS (**T**rends in **I**nternational **M**athematics and **S**cience **S**tudy) je međunarodno istraživanje u kojem se ispituju matematičke i prirodoslovne kompetencije učenika četvrtih i osmih razreda osnovne škole. U istraživanju TIMSS 2011 sudjelovala je i Hrvatska.

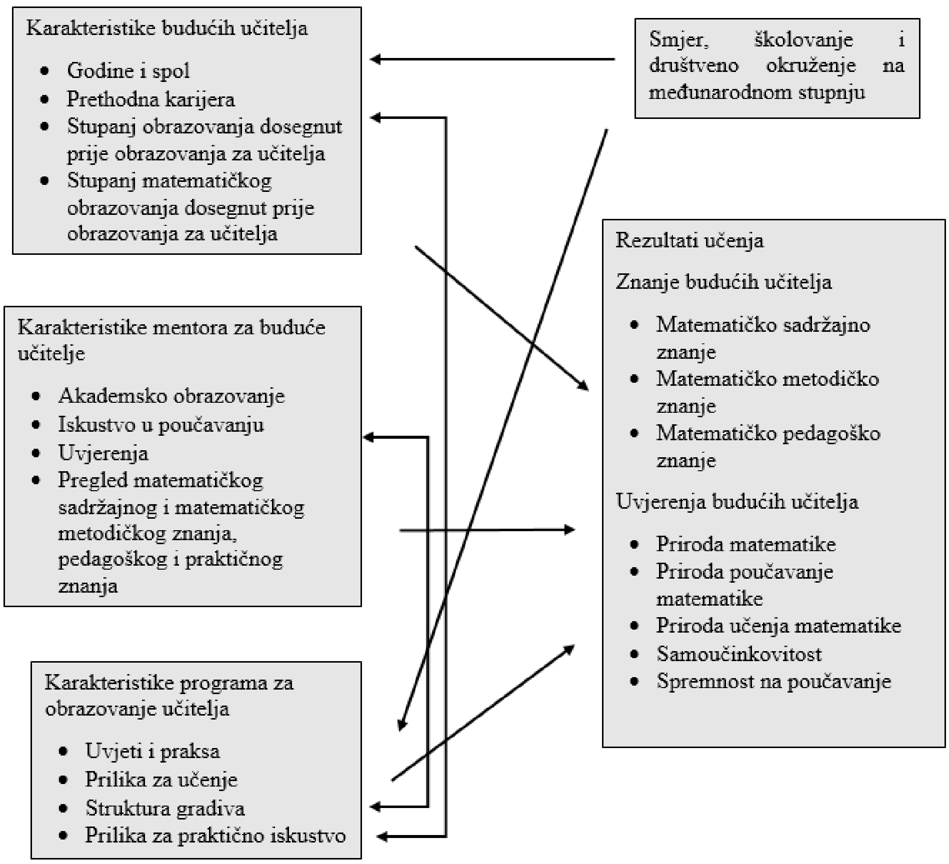
[3] ISCED (International Standard Classification of Education) je međunarodna standardna klasifikacija obrazovanja.

1.1. Ispitivana područja

Istraživanje TEDS – M 2008 prikupljalo je podatke o sustavu obrazovanja učitelja primarnog obrazovanja i učitelja matematike unutar zemalja sudionica na tri razine:

- Rezultati: Koji je stupanj i dubina matematičkog i povezanog nastavničkog znanja koje dosežu učitelji?
- Institucije i programi: Koje su glavne karakteristike ustanova i programa za obrazovanje učitelja? Na koji način se te karakteristike razlikuju između zemalja? Koje su mogućnosti učenja dostupne učiteljima matematike? Koji su sadržaji programa za obrazovanje učitelja i na koji su način organizirani?
- Državna politika: Kakva je državna obrazovna politika u pogledu zapošljavanja, kurikuluma, osiguranja kvalitete i financiranja?

Na slici 1. dan je pregled i međusobni utjecaj ispitivanih područja u TEDS – M istraživanju.



Slika 1. *Pregled i međusobni utjecaj ispitivanih područja u TEDS – M istraživanju*

TEDS-M-ov istraživački tim razvio je četiri upitnika. Prvi upitnik bio je namijenjen budućim učiteljima primarnog obrazovanja i uključivao je zadatke koji ispituju njihovo matematičko znanje potrebno za poučavanje. Drugi upitnik odnosio se na buduće učitelje matematike u nižem sekundarnom obrazovanju i sadržavao je zadatke koji ispituju njihovo matematičko znanje. Kako bi se vrednovalo matematičko sadržajno i metodičko znanje, upitnik za buduće učitelje uključivao je pitanja vezana uz opće predznanje, prilike za sudjelovanje u programima učenja te uvjerenja o poučavanju i učenju matematike. Preostala dva upitnika bila su upitnik za mentore i upitnik o institucionalnim programima.

1.2. Dimenzije matematičkog znanja

Istraživanjem TEDS – M ispitane su dvije dimenzije znanja budućih učitelja: njihovo matematičko sadržajno znanje (MSZ) i matematičko – metodičko znanje (MMZ). Kako bi se maksimalno povećala veza s ostalim međunarodnim istraživanjima, TEDS – M je za ispitivanje matematičkog sadržajnog znanja upotrijebio matematički okvir TIMSS – a (razvijen za učenike) i prilagodio ga studentima.

1.2.1. Matematičko sadržajno znanje

Zadaci iz područja matematičkog sadržajnog znanja bili su analizirani su prema tri dimenzije: sadržajno područje, kognitivna domena i kurikulumski stupanj. Okvir sadržajnog znanja bio je prilagođen prema TIMSS 2007 i TIMSS Advanced 2008. Sadržajna područja uključivala su: brojeve i operacije, geometriju i mjerenje, algebru i funkcije te vjerojatnost i statistiku. Većina sadržaja prikazanog u tablici 1.1. primjerena je budućim učiteljima u oba odgojno-obrazovna ciklusa (primarno i niže sekundarno obrazovanje), osim naprednih tema iz algebre i funkcija koje nisu uključene u ispitivanje prve skupine budućih učitelja. Sva četiri područja trebala su biti jednako zastupljena, no ustanovljeno je da nisu sve zemlje sudionice imale jednake mogućnosti za učenje vjerojatnosti i statistike. Stoga je to područje u ispitivanju manje zastupljeno. Kognitivne domene uključivale su: znanje, primjenu i rasuđivanje, a kurikulumski stupnjevi bili su početni, srednji i napredni.

Tablica 1.1. *Sadržajna područja i teme*

PODRUČJE	TEMA
Brojevi i operacije	Prirodni brojevi Razlomci i decimalni brojevi Brojevni izrazi Pravilnosti i veze Cijeli brojevi Omjeri, proporcije i postotci Iracionalni brojevi Teorija brojeva
Geometrija i mjerenje	Geometrijski likovi Geometrijska mjerenja Analitička geometrija
Algebra i funkcije	Pravilnosti Algebarski izrazi Jednadžbe/formule i funkcije Napredne teme: npr. limesi, neprekidnost, matrice (za niže sekundarno obrazovanje)
Vjerojatnost i statistika	Prikazivanje i organizacija podataka Čitanje i interpretiranje podataka Vjerojatnost

1.2.1.1. Kognitivne domene

TEDS – M je od istraživanja TIMSS 2007 i TIMSS Advanced preuzeo podjelu kognitivnog područja na znanje, primjenu i rasuđivanje. Prvo područje, znanje, pokrivalo je činjenice, postupke i koncepte koje studenti moraju znati, dok je drugo područje, primjena, bilo usmjereno na sposobnost primjene tog znanja pri odabiru i stvaranju modela te pri rješavanju problema. Treće područje, rasuđivanje, ispitivalo je sposobnost korištenja analitičkih vještina, generalizacije i primjene matematike u nepoznatim i kompleksnim kontekstima. Ponašanja povezana sa svakim od ta tri područja prikazana su u donjoj tablici.

Tablica 1.2. *Podjela kognitivnog područja*

Znanje	
Sjetiti se	Sjetiti se definicija; terminologije; svojstava brojeva; geometrijskih svojstava i notacije.
Prepoznati	Prepoznati matematičke objekte, oblike, brojeve i izraze; prepoznati objekte koji su matematički ekvivalentni.

Izračunati	Izvršiti algoritamske postupke zbrajanja, množenja, dijeljenja i oduzimanja prirodnih brojeva, razlomaka, decimalnih brojeva i cijelih brojeva; odrediti približne vrijednosti brojeva za procjenu izračuna; izvršiti rutinske algebarske postupke.
Očitati	Očitati informacije s grafa, iz tablica i drugih izvora; očitati jednostavne mjerne ljestvice.
Mjeriti	Koristiti mjerne instrumente; prikladno koristiti mjerne jedinice; procijeniti mjere.
Razvrstati/ poredati	Razvrstati/grupirati objekte, oblike, brojeve i izraze prema zajedničkim svojstvima; donijeti korektne odluke o pripadnosti klasi; poredati brojeve i objekte po svojstvima.
Primjena	
Odabrati	Odabrati učinkovitu/odgovarajuću operaciju, metodu ili strategiju za rješavanje problema u kojima je poznat algoritam ili metoda rješavanja.
Predstaviti	Prikazati matematičke informacije i podatke pomoću dijagrama, tablice, mape ili grafikona; stvoriti ekvivalentne prikaze za dani matematički objekt ili vezu.
Modelirati	Stvoriti odgovarajući model, kao što je jednadžba ili dijagram, za rješavanje rutinskog problema.
Izvršiti	Pratiti i izvršiti matematičke upute; crtati likove i oblike prema danim svojstvima.
Rješavati rutinske probleme	Rješavati rutinske ili poznate probleme (na primjer koristiti geometrijska svojstva za rješavanje problema); usporediti i pridružiti različite prikaze podataka; koristiti podatke iz mapa, tablica i grafova pri rješavanju rutinskih problema.
Rasuđivanje	
Analizirati	Odrediti i opisati ili koristiti veze između varijabli i objekata u matematičkim situacijama; koristiti proporcionalno rasuđivanje; rastaviti geometrijske likove radi jednostavnijeg rješavanja problema; nacrtati mrežu danog nepoznatog geometrijskog tijela; predočiti transformacije trodimenzionalnih tijela; usporediti i pridružiti različite prikaze istih podataka; donijeti valjan zaključak iz danih informacija.
Generalizirati	Proširiti područje djelovanja tako da rezultati matematičkog mišljenja i rješavanja problema budu primjenjivi, preformuliranjem rezultata u općenitije i šire primjenjive izraze.

Sintetizirati/integrirati	Kombinirati različite matematičke postupke za formiranje rezultata, i kombiniranje rezultata za stvaranje daljnjih rezultata; stvaranje veza između različitih elemenata znanja i povezanih prikaza, i stvaranje poveznica između odgovarajućih matematičkih ideja.
Opravdavati	Navesti opravdanje za istinitu ili lažnu tvrdnju pozivanjem na matematičke rezultate ili svojstava.
Rješavati nerutinske probleme	Rješavati probleme iz matematičkog ili realnog konteksta za koje je malo vjerojatno da su se budući nastavnici susreli s njima, i primijeniti matematičke postupke u nepoznatim ili složenim kontekstima; koristiti geometrijska svojstva za rješavanje ne rutinskih problema.

1.2.1.2. Kurikulumska razina

Istraživanje je proučavalo matematičko znanje potrebno za poučavanje te je kurikulumska razina svakog zadatka iz područja matematičkog sadržajnog znanja kategorizirana u jedan od tri stupnja: početna razina, srednja razina ili napredna razina.

Početna razina obuhvaćala je matematički sadržaj koji se poučava u onim razredima za koje se budući učitelj priprema. Srednja i napredna razina odnosile su se na matematičke sadržaje koji se poučavaju u razredima višim od onih za koje se budući učitelj priprema. Za srednju razinu riječ je o jedan ili dva razreda više, a za naprednu razinu o tri ili četiri razreda više od onih za koje se budući nastavnik priprema. To je značilo, na primjer, da se za studenta koji se priprema za poučavanje u prva četiri razreda osnovne škole, zadacima iz srednjeg kurikulumskog stupnja, provjerava znanje matematičkog sadržaja petog i šestog razreda, ili na primjer, da se za studenta koji se priprema za poučavanje u prva četiri razreda osnovne škole, zadacima iz naprednog kurikulumskog stupnja, provjerava znanje matematičkog sadržaja sedmog i osmog razreda.

1.2.2. Matematičko – metodičko znanje

U istraživanju TEDS – M važnu ulogu imalo je matematičko metodičko znanje koje je podijeljeno na tri područja: matematičko kurikulumsko znanje, znanje planiranja matematičkog učenja i poučavanja te matematičko djelovanje u učenju i poučavanju. Ta područja uz prikladnu argumentaciju prikazana su u Tablici 1.1.3.

Tablica 1.3. *Okvir matematičko - metodičkog znanja*

Područje matematičko – metodičkog znanja	**Argumentacija**
Matematičko kurikulumsko znanje	◦ Postaviti odgovarajuće ciljeve učenja ◦ Poznavati različite oblike vrednovanja ◦ Odabrati mogući način poučavanja i uspostaviti veze unutar kurikuluma ◦ Prepoznati ključne ideje u programu učenja ◦ Znanje matematičkog kurikuluma
Znanje planiranja matematičkog učenja i poučavanja	◦ Planirati i odabrati odgovarajuće aktivnosti ◦ Odabrati oblike vrednovanja ◦ Predvidjeti tipične učeničke odgovore, uključujući i pogrešno shvaćanje ◦ Planirati odgovarajuće metode za predstavljanje matematičkih ideja ◦ Povezati didaktičke metode s instrukcijskim planom ◦ Koristiti različite pristupe pri rješavanju matematičkih problema ◦ Planirati izvedbu nastave
Matematičko djelovanje u učenju i poučavanju	◦ Analizirati i vrednovati učenička matematička rješenja ili obrazloženja ◦ Analizirati sadržaj učeničkih pitanja ◦ Analizirati tipične učeničke odgovore uključujući i pogrešno shvaćanje ◦ Objasniti ili predstaviti matematičke koncepte ili procese ◦ Stvarati plodonosna pitanja ◦ Odgovarati na neočekivane matematičke probleme ◦ Osigurati odgovarajuću povratnu informaciju

1.3. Ispitne knjižice i vrste zadataka

S ciljem da svako područje bude mjerljivo i podjednako zastupljeno, broj zadataka trebao je biti razumno velik. Testno vrijeme za matematiku bilo je ograničeno na 60 minuta, stoga pojedini sudionik ni bi bio u mogućnosti odgovoriti na sve zadatke u testnom okviru, pa je bilo potrebno formirati nekoliko testnih knjižica s blokovima zadataka. Za studente koji se pripremaju predavati u nižim razredima osnovne škole pripremljeno je pet blokova zadataka, ukupno 75 zadataka, a za studente koji se pripremaju predavati u višim razredima osnovne škole pripremljena su tri bloka zadataka, ukupno 50 zadataka.

Zadaci su bili podijeljeni u tri skupine, prema odgovoru koji je zadatak zahtijevao: višestruki izbor (VI), složeni višestruki izbor (SVI) i konstruirani odgovor (KO). Višestruki izbor i složeni višestruki izbor odnosili su se na zadatke zatvorenog tipa, dok se konstruirani odgovor odnosio na zadatke otvorenog tipa.

Tablica 1.4. *Učestalost pojedinog oblika zadatka*

Razina	**Broj zadataka**					
	Niži razredi			**Viši razredi**		
Oblik zadatka	**MSZ**	**MMZ**	**Ukupno**	**MSZ**	**MMZ**	**Ukupno**
VI	23	6	29	10	4	14
SVI	62	14	76	64	23	87
KO	5	14	19	13	2	15
Ukupno	90	34	**124**	87	29	**116**

1.4. Vrednovanje odgovora

Odgovori na zadatke višestrukog izbora i na pod zadatke složenog višestrukog izbora bodovani su s jednim bodom za točan i s nula bodova za netočan odgovor. Bodovanje zadataka konstruiranog odgovora baziralo se na metodologiji koju je razvila IEA. U ovisnosti u stupnju složenosti, pojedini je zadatak konstruiranog bodovan s jedan ili dva boda za potpuno točan odgovor:

- Jedan bod ukoliko je zadatak točno riješen, nula bodova ukoliko je zadatak netočno riješen.
- Dva boda ukoliko je zadatak potpuno točno riješen, jedan bod ukoliko je zadatak djelomično točno riješen te nula bodova ukoliko je zadatak netočno riješen. Na primjer, odgovor na zadatak koji ispituje matematičko sadržajno znanje sadrži netočno rješenje, ali zbog matematički prikladnog rasuđivanja dodjeljivao se jedan bod, kao i za nepotpune odgovore koji nisu potpuno jasni.

Sistem bodovanja za zadatke konstruiranog odgovora korištene su dvije znamenke. Prva znamenka označavala je stupanj korektnosti pojedinog odgovora: „2“ za odgovor koji nosi 2 boda, „1“ za odgovor koji nosi jedan bod, „7“ za netočan odgovor. Druga znamenka, u kombinaciji s prvom, korištena je za razlikovanje metode koju je budući učitelj upotrijebio pri rješavanju zadatka ili za praćenje učestalih pogrešaka i miskoncepcija. Informacija koja se može očitati iz druge znamenke davala je odgovore na sljedeća pitanja:

- Razlikuje li se korišteni pristup pri rješavanju zadatka među zemljama sudionicama?
- Je li neki od tih pristupa uspješniji od drugih?
- Koje su zajedničke miskoncepcije koje imaju budući učitelji o ispitivanom konceptu?
- Koje su zajedničke pogreške budućih učitelja?

Druga znamenka bila je broj između 0 i 5, ovisno o tome koji je stupanj korektnosti u odgovoru. Ukoliko je zadnja znamenka bila 9, to je značilo da odgovor ne pripada ni jednoj od prethodno navedenih kategorija. Primjer općeg dvoznamenkastog bodovanja korišten za zadatke konstruiranog odgovora dan je u Tablici 1.4.

Tablica 1.4. *Primjer opće kodne tablice*

Kod	**Odgovor**
	Točan odgovor
20	Točan odgovor Tip 1
21	Točan odgovor Tip 2
…	
29	Ostali točni odgovori
	Djelomično točan odgovor
10	Djelomično točan odgovor Tip 1
11	Djelomično točan odgovor Tip 1
…	
19	Ostali djelomično točni odgovori
	Netočan odgovor
70	Netočan odgovor Tip 1
71	Netočan odgovor Tip 2
…	
79	Ostali netočni odgovori
	Bez odgovora
99	Prazno

1.4.1. Primjeri vrednovanja zadataka

U nastavku dajemo primjere zadataka korištenih u predtestiranju, koji nisu ušli u glavno istraživanje. Svaki zadatak u ispitivanju TEDS – M opisan je matricom u kojoj se nalaze sljedeće kategorije: domena, poddomena, stupanj i vrsta odgovora. Uz zadatke konstruiranog odgovora dajemo i pripadne kodne tablice.

Primjer 1.

Kategorizacija	
Domena:	Matematičko metodičko znanje (MMZ)
Poddomena:	Djelovanje – analiza i vrednovanje učeničkog matematičkog rješenja ili argumenta; davanje prikladne povratne informacije
Stupanj:	Početni
Vrsta odgovora:	Višestruki izbor

Gospodina Gorana iznenadilo je otkriće nove metode oduzimanja jednog njegovog učenika. Gospodin Goran pitao se vrijedi li ta metoda uvijek pa ju je pokazao kolegici Mariji.

$$\begin{array}{r} 37 \\ -19 \\ \hline -2 \\ 20 \\ \hline 18 \end{array}$$

Označi jedan kvadratić

A. Trebala bi mu reći da ovaj postupak vrijedi samo za ovaj zadatak i ove brojeve. ☐

B. Trebala bi mu reći da ovaj postupak nema matematičko objašnjenje. ☐

C. Trebala bi mu dati do znanja da ovaj postupak vrijedi za sve brojeve. ☐

D. Trebala bi mu reći da ovaj postupak vrijedi samo u specijalnim slučajevima. ☐

Što mislite, što bi mu Marija trebala reći?

Napomena. U ovom zadatku je uklonjen odgovor E. „Nisam siguran/na.“

Primjer 2.

Kategorizacija	
Domena:	Matematičko sadržajno znanje (MSZ)
Poddomena:	Podatci
Kognitivna domena:	Rasuđivanje
Stupanj:	Srednji
Vrsta odgovora:	Konstruirani odgovor

Učitelj je pred učenike postavio sljedeći problem:

> Brojevi u nizu 7, 11, 15, 19, 23, … povećavaju se za 4. Brojevi u nizu 1, 10, 19, 28, 37, … povećavaju se za 9.
>
> Broj 19 nalazi se u oba niza.
>
> Ako bi se oba niza nastavila prema istom pravilu, koji će se broj prvi sljedeći pojaviti u oba niza?

a) Koji je korektan odgovor na ovo pitanje?

b) Učenik je na postavljeno pitanje odgovorio: „27 i 46.“. Na temelju čega je učenik to zaključio?

Tablica 1.5. *Kodna tablica za Primjer 2, (a).*

Kôd	**Odgovor za (a) dio zadatka**
	Točan odgovor
10	55
	Netočan odgovor
70	Odgovori „27“, „19“, „46“, zaključeni na temelju pogrešnog čitanja zadatka.
71	Bilo koji drugi netočan odgovor.
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno.

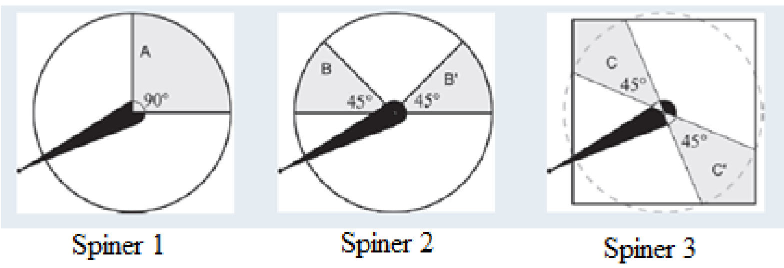
Tablica 1.6. *Kodna tablica za Primjer 2, (b).*

Kôd	**Odgovor za (b) dio zadatka**
	Točan odgovor
20	Odgovor koji prepoznaje da je učenik pogrešno pročitao zadatak, pogrešno interpretirao zadatak ili pogrešno razumio zadatak te objašnjava tu pogrešku: Primjer: *Učenik je pogrešno interpretirao pitanje i dao odgovor na pitanje: „Koji se sljedeći broj pojavljuje u svakom od nizova?“.*
	Djelomično točan odgovor
10	Ograničen odgovor koji prepoznaje da je učenik pogrešno pročitao, pogrešno interpretirao ili pogrešno razumio pitanje, bez objašnjenja te pogreške. Primjer: *Učenik je pogrešno pročitao pitanje.*
11	Odgovor koji objašnjava da su brojevi 27 i 46 brojevi koji slijede u svakom pojedinom nizu, ali ne daje razloge zbog kojih je učenik tako odgovorio na pitanje. Primjer: *To su brojevi koji slijede u svakom od nizova. Učenik je dao brojeve koji slijede u svakom pojedinom nizu, a nije dao broj koji je zajednički u oba niza.*
	Netočan odgovor
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno

Primjer 3.

Kategorizacija	
Domena:	Matematičko sadržajno znanje (MSZ)
Poddomena:	Podatci
Stupanj:	Napredni za primarnu razinu, početni za višu razinu
Vrsta odgovora:	Složeni višestruki izbor

Vaši učenici promatraju spinere na slici. Diskutiraju o vjerojatnosti da se kazaljka zaustavi na osjenčanom području.



Odredite jesu li sljedeće izjave učenika potpuno istinite, djelomično istinite ili potpuno neistinite. Ako je jedna rečenica u izjavi istinita, a druga neistinita, izjavu označite kao djelomično istinitu.

Označi jedan kvadratić u svakom retku

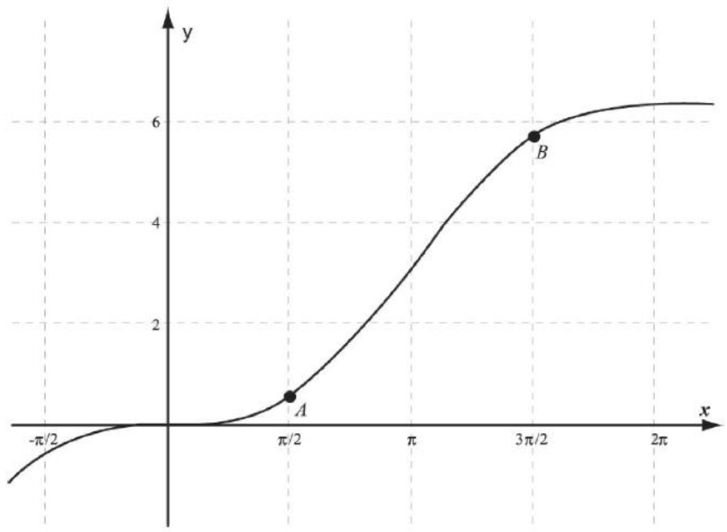
	Potpuno istinito	**Djelomično istinito**	**Neistinito**
A. Sanja kaže: „*Vjerojatnost je dvostruko veća za spinere 2 i 3 u usporedbi sa spinerom 1, zato što spineri 2 i 3 imaju po dva područja na kojima se kazaljka može zaustaviti, dok spiner 1 ima jedno takvo područje.“.*	☐	☐	☐
B. Gregor kaže: „*Spineri 1 i 2 imaju jednaku vjerojatnost jer su im osjenčana područja jednake površine. S druge strane, spiner 3 ima veću vjerojatnost od spinera 2 jer ima i veću osjenčanu površinu.“.*	☐	☐	☐
C. Pavao kaže: „*Spineri 1, 2 i 3 imaju jednaku vjerojatnost jer su kutovi osjenčanih površina jednake veličine.“.*	☐	☐	☐
D. Miro kaže: „*Vjerojatnost za spinere 1 i 2 je jednaka jer njihove osjenčane površine zauzimaju jednake udjele u krugu. Za spinere 2 i 3 vjerojatnosti su različite jer osjenčana površina spinera 3 zauzima veći udio u kvadratu nego osjenčana površina spinera 2 u krugu.“.*	☐	☐	☐

Napomena. U ovom zadatku dodani su stupnjevi na dijagrame te je na spiner 3 dodana isprekidana kružnica.

Primjer 4.

Kategorizacija	
Domena:	Matematičko sadržajno znanje (MSZ)
Poddomena:	Algebra
Kognitivna domena:	Primjena
Stupanj:	Napredni
Vrsta odgovora:	Konstruirani odgovor

Na slici je prikazan graf funkcije zadane pravilom $f(x) = x - \sin x$. Odredi u okolini koje je od točaka A i B nagib grafa veći.



Tablica 1.7. *Kodna tablica za primjer 4.*

Kôd	**Odgovor za (b) dio zadatka**
	Točan odgovor
20	Odgovor koji prepoznaje da su nagibi grafa u točki A i u točki B jednaki. Primjer: *Ako je* $f(x) = x - \sin x$, *onda je* $f'(x) = 1 - \cos x$. *U točki* $x = \frac{\pi}{2}$ *je* $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, *kao što i u točki* $x = \frac{3\pi}{2}$ *vrijedi* $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$.
	Djelomično točan odgovor
10	Odgovor koji korektno pokazuje derivaciju dane funkcije, ali sadrži pogreške u određivanju vrijednosti derivacije u zadanim točkama, na temelju kojih slijedi zaključak da su nagibi tangenata na graf dane funkcije u točkama A i B različiti.

11	Odgovor koji objašnjava da su nagibi u točkama *A* i *B* jednaki, uz objašnjenje koje je djelomično točno i djelomično netočno.
	Netočan odgovor
70	Odgovori koji sadrže nekorektne pokušaje deriviranja zadane funkcije.
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno.

U nastavku rada, organizirani u dva poglavlja, slijede odabrani primjeri objavljenih zadataka za buduće učitelje nižih i viših razreda osnovne škole te njihova detaljno razrađena rješenja.

2. OBJAVLJENI ZADACI ZA BUDUĆE UČITELJE PRIMARNOG OBRAZOVANJA

Skupina objavljenih zadataka za učitelje primarnog obrazovanja, tj. razredne nastave, sastoji se od 24 zadatka koji ispituju matematičko sadržajno znanje i 10 zadataka koji ispituju matematičko metodičko znanje. Svaki od 24 zadatka koji ispituju matematičko sadržajno znanje pripada jednoj od tri kognitivne razine: *Znanje* (15 zadataka), *Primjena* (8 zadataka) *Rasuđivanje* (1 zadatak), a svaki od 10 zadataka koji ispituju matematičko metodičko znanje pripada jednoj od dvije poddomene kurikuluma: *Planiranje* (6 zadataka), *Upotreba* (4 zadatka).

Zadaci su grupirani po skupinama prema sadržajnoj domeni kojoj pripadaju: *Brojevi i operacije* (10 zadataka), *Algebra i funkcije* (12 zadataka), *Geometrija i mjerenje* (8 zadataka), *Podatci i vjerojatnost* (4 zadatka).

Pojmovi matematičko sadržajno znanje, matematičko metodičko znanje, sadržajna domena, poddomena, kognitivna razina i kurikulumska domena, kao i ishodi učenja, detaljno su definirani i razrađeni u poglavlju 1. koje opisuje strukturu TEDS – M istraživanja.

Ovo poglavlje započinjemo preglednom tablicom svih objavljenih zadataka za buduće učitelje primarne razine obrazovanja, tj. razredne nastave, u kojoj su vidljivi ovi podaci o pojedinom zadatku: identifikacijski broj, dimenzija znanja, sadržajna domena, poddomena, kratki opis, način zadavanja, ključ, maksimalan broj bodova i međunarodni prosjek riješenosti. Pritom, ključ u zadacima višestrukog izbora je jedan od brojeva 1 – 4, ovisno o tome koliko je bilo ponuđenih odgovora, odnosno skraćenica „KT“ u zadacima konstruiranog odgovora, koja označava da je odgovor dan u obliku kodne tablice.

Kako bismo zadržali izvorni izgled zadataka iz TEDS – M istraživanja, tablice i slike koje su dijelovi teksta zadatka, nećemo posebno numerirati. Nakon teksta svakog zadatka slijedi njegovo rješenje uz detaljno metodičko objašnjenje, osvrt na ishod učenja koji se provjerava tim zadatkom te međunarodni postotak riješenosti preuzet iz već spomenute tablice.

Tablica 2.1. *Objavljeni zadaci za buduće učitelje primarnog obrazovanja (razredna nastava)*

ID zadatka	**Dimenzija znanja**	**Sadržajna domena**	**Poddomena**	**Opis**	**Vrsta zadatka**	**Ključ**	**Maksimalan broj bodova**	**Međunarodni prosjek riješenosti**
MFC106	MSZ[4]	Podatci i vjerojatnost	Primjena	Pravednost igre dvjema kockicama.	VI[5]	2	1	28%
MFC108	MMZ[6]	Algebra i funkcije	Rasuđivanje	Jednadžba koja najbolje predstavlja Anin uzorak.	VI	3	1	28%
MFC202A	MSZ	Algebra i funkcije	Znanje	Istinitost algebarskih jednakosti.	SVI[7]	2	1	81%
MFC202B	MSZ	Algebra i funkcije	Znanje	Istinitost algebarskih jednakosti.	SVI	2	1	86%
MFC202C	MSZ	Algebra i funkcije	Znanje	Istinitost algebarskih jednakosti.	SVI	1	1	92%
MFC202D	MSZ	Algebra i funkcije	Znanje	Istinitost algebarskih jednakosti.	SVI	2	1	64%
MFC203	MSZ	Geometrija i mjerenje	Primjena	Površina šetnice oko četverokutnog bazena.	VI	3	1	67%
MFC204	MSZ	Geometrija i mjerenje	Znanje	Interpretacija učeničkih Vennovih dijagrama o pravokutnicima.	VI	3	1	61%
MFC206A	MSZ	Brojevi i operacije	Primjena	Nepoznata masa na vagi.	VI	2	1	78%
MFC206B	MMZ	Brojevi i operacije	Kurikulum/ planiranje	Sastavljanje različitog problema o potrošnji goriva.	KO	KT[8]	1	54%
MFC208A	MMZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Josipova zabuna u korištenju kalkulatora.	KO	KT	2	20% (PT)[9] 12% (DT)
MFC208B	MMZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Grafički prikaz 0.2 · 6 pomoću modela.	KO	KT	2	16% (PT) 16% (DT)
MFC303	MSZ	Algebra i funkcije	Primjena	Nepoznata masa na vagi.	VI	3	1	82%
MFC304	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Koliko je decimalnih brojeva između dva broja?	VI	4	1	54%
MFC307A	MSZ	Geometrija i mjerenje	Znanje	Rješavanje problema obujma objekata.	VI	1	1	78%

[4] MSZ – Matematičko sadržajno znanje
[5] VI - Višestruki izbor
[6] MMZ – Matematičko metodičko znanje
[7] SVI – Složeni višestruki izbor
[8] KT – Kodna tablica
[9] PT – Potpuno točno (2 boda); DT – Djelomično točno (1 bod)

ID zadatka	Dimenzija znanja	Sadržajna domena	Poddomena	Opis	Vrsta zadatka	Ključ	Maksimalan broj bodova	Međunarodni prosjek riješenosti
MFC307B	MMZ	Geometrija i mjerenje	Kurikulum/ planiranje	Preformulacija pitanja o volumenu i kockicama.	KO	KT	2	38% (PT) 14% (DT)
MFC308	MSZ	Algebra i funkcije	Primjena	Pravilo za broj ljudi oko n stolova.	KO	KT	1	%
MFC312	MMZ	Algebra i funkcije	Kurikulum/ planiranje	Jednadžba koja se ne može prikazati na vagi jednakih krakova.	VI	2	1	38%
MFC408	MSZ	Geometrija i mjerenje	Primjena	Površina raznostraničnog trokuta u kvadratnoj mreži.	VI	1	1	60%
MFC410	MMZ	Podatci i vjerojatnost	Rasuđivanje	Sličnosti i razlike u prikazu podataka.	KO	KT	2	29% (PT) 38% (DT)
MFC412A	MSZ	Algebra i funkcije	Znanje	Tri uzastopna parna broja – značenje k .	VI	1	1	56%
MFC412B	MSZ	Algebra i funkcije	Znanje	Tri uzastopna neparna broja – korektan izraz.	VI	2	1	51%
MFC501	MSZ	Geometrija i mjerenje	Znanje	Mreža trostrane prizme.	VI	4	1	85%
MFC502A	MSZ	Podatci i vjerojatnost	Rasuđivanje	Neoznačeni stupčasti dijagram – interpretacija informacija.	VI	3	1	85%
MFC502B	MMZ	Podatci i vjerojatnost	Kurikulum/ planiranje	Poteškoća s predstavljanjem podataka u problemu.	KO	KT	2	23% (PT) 51% (DT)
MFC503A	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Brojevi – racionalan ili iracionalan.	SVI	2	1	74%
MFC503B	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Brojevi – racionalan ili iracionalan.	SVI	1	1	89%
MFC503C	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Brojevi – racionalan ili iracionalan.	SVI	1	1	69%
MFC503D	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Brojevi – racionalan ili iracionalan.	SVI	1	1	42%
MFC505	MMZ	Brojevi i operacije	Kurikulum/ planiranje	Prepoznavanje dvaju najtežih problema.	KO	KT	2	77% (PT) 20% (DT)
MFC508	MSZ	Algebra i funkcije	Primjena	Uzorak od šibica – predviđanje Oblika 10.	VI	2	1	74%
MFC509	MSZ	Algebra i funkcije	Znanje	Veći $2n$ ili $n + 2$.	KO	KT	2	12% (PT) 21% (DT)
MFC511	703 MSZ	Geometrija i mjerenje	Primjena	Dužina vrpce za dvije poklon kutije.	KO	KT	2	19% (PT) 19% (DT)
MFC513	MMZ	Geometrija i mjerenje	Kurikulum/ planiranje	Dva razloga za mjerenje pomoću spajalica.	KO	KT	2	9% (PT) 39% (DT)

2.1. Brojevi i operacije

Sadržajna domena *Brojevi i operacije* podijeljena je na poddomene *Prirodni brojevi, Razlomci i decimalni brojevi, Brojevni izrazi, Pravilnosti i veze,* Cijeli brojevi, *Omjeri, proporcije i postotci* i *Iracionalni brojevi*. Objavljeni zadaci obuhvaćaju po jedan zadatak iz poddomena *Prirodni brojevi, Omjeri, proporcije i postotci* i *Iracionalni brojevi* te dva zadatka iz poddomene *Razlomci i decimalni brojevi*.

U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko metodičko znanje vezano uz prirodne i decimalne brojeve, od budućih se učitelja primarne razine obrazovanja očekuje da znaju analizirati tipične učeničke odgovore, uključujući i učeničko pogrešno shvaćanje (miskoncepcije) vezano uz navedene matematičke sadržaje. Također se očekuje da budući učitelji razlikuju i koriste metodičke modele ključne pri uvođenju navedenih koncepata u nastavi matematike. U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko sadržajno znanje, od budućih se učitelja primarne razine obrazovanja očekuje znanje koncepta proporcionalnosti i omjera, koncepta decimalnih brojeva te koncepta racionalnih i iracionalnih brojeva.

2.1.1. Prirodni brojevi

U sljedećim zadacima ispituje se matematičko sadržajno i metodičko znanje budućih učitelja primarnog obrazovanja vezano uz računske operacije zbrajanja i oduzimanja u skupu $\{0,1,2,\ldots,20\}$ te uz razumijevanje koncepta decimalnih brojeva. Od ispitanika se očekuje poznavanje i konkretna primjena različitih modela pomoću kojih učenici otkrivaju i usvajaju navedene koncepte.

Zadatak 2.1.1. (MFC505)

Učiteljica petog razreda postavila je pred svoje učenike 4 zadatka, dajući im upute da zadatke riješe na koji god način žele, uključujući korištenje materijala po želji.

Zadatak 1: Josip ima 3 paketa sličica. U svakom paketu nalazi se po 6 sličica. Koliko ukupno sličica ima Josip?

Zadatak 2: Joško je imao 5 ribica u akvariju. Za rođendan je dobio 7 ribica. Koliko ribica je imao nakon toga?

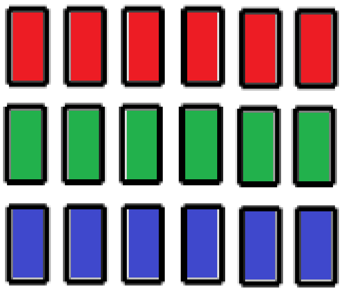
Zadatak 3:	Ivan je imao nekoliko igračaka automobila. Izgubio ih je 7. Sad ima 4 igračke automobila. Koliko je igračaka automobila Ivan imao prije nego je ijednu izgubio?
Zadatak 4:	Marta je imala 13 balona. 5 balona je puklo. Koliko joj je balona ostalo?

Odredite koja dva zadatka će učenicima petog razreda biti teža od ostalih.

Odgovor. Riješimo prvo zadatke koje je učiteljica postavila učenicima, i to na način primjeren prvom razredu osnovne škole, u kojem se uči zbrajati i oduzimati u skupu nenegativnih cijelih brojeva do 20. Rješenje prvog zadatka je 18 sličica, do čega učenici dolaze uzastopnim zbrajanjem $6+6+6=18$. Naglasimo da zadatak neće riješiti kao $3\cdot 6=18$ jer množiti do $10\cdot 10$ uče tek u drugom razredu. Drugi zadatak rješava se direktnom primjenom računske operacije zbrajanja $5+7=12$ ribica, dok u trećem zadatku treba postaviti brojevnu jednakost s nepoznatim članom, tj. $\square-7=4$ te ju riješiti primjenom veze računskih operacija zbrajanja i oduzimanja, odnosno metodom vraćanja unatrag, kao $\square=4+7=11$ igračaka automobila. Konačno četvrti zadatak rješava se direktnim oduzimanjem i dobije se rješenje $13-5=8$ balona.

S obzirom na matematičke sadržaje i procese koji se poučavaju u prvom razredu osnovne škole, očito je da Zadatak 2. i Zadatak 4. pripadaju u klasu tzv. rutinskih problema koji se rješavaju odabirom prikladne računske operacije (biraju između zbrajanja i oduzimanja) i njenom direktnom primjenom. S druge strane, u zadatku 1. od učenika se očekuje primjena uzastopnog zbrajanja triju jednakih pribrojnika, uz prethodni odabir računske operacije. Indirektno, učenici ovdje primjenjuju svojstva zbrajanja, tj. njegovu asocijativnost. Zadatak 3 najsloženiji je od zadanih zadataka jer je u njemu potrebno prepoznati nepoznatu veličinu (početni broj igračaka) i staviti je u vezu s poznatim podatcima odabirom korektne računske operacije te zapisivanjem brojevne jednakosti u kojoj se ta nepoznata veličina nalazi. Zapravo, od učenika se očekuje postavljanje jednadžbe te njeno rješavanje primjenom veze zbrajanja i oduzimanja. Zbog svega navedenog, razvidno je da će zadaci 1. i 3. učenicima biti teži od preostalih dvaju zadanih zadataka.

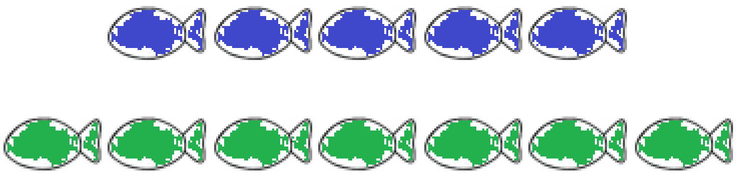
Osim postavljanja brojevnih rečenica, moguće je da će učenici postavljene zadatke rješavati i grafičkom metodom (crtanjem). Npr. slika koja odgovara rješenju prvog zadatka mogla bi izgledati ovako:



Slika 2.1. *Josipove sličice*

a učenici na pitanje odgovaraju direktnim prebrojavanjem nacrtanih objekata ili čak prebrojavanjem pomoću prstiju, bez ikakvog zapisa riječima.

Zadatak 2. može se riješiti uz pomoć Slike 2.2.



Slika 2.2. *Joškove ribice*

te neposrednim prebrojavanjem.

Zadatku 3. mogla bi odgovarati Slika 2.3.,

Slika 2.3. *Ivanovi automobili*

dok se zadatak 4. može vizualizirati ovako:

Slika 2.4. *Martini baloni*

Zadatkom 2.1.1. ispituje se matematičko metodičko znanje vezano uz računske operacije zbrajanja i oduzimanja u skupu $\{0,1,2,\ldots,20\}$, a od ispitanika se očekuje uvid u modele i metode kojima raspolažu učenici prvog razreda osnovne škole. U nastavku dajemo pripadnu kodnu tablicu u skladu s kojom su u istraživanju TEDS – M kodirani odgovori ispitanika. Ovaj je zadatak točno riješilo 77% ispitanika, a djelomično točno 20% ispitanika.

Tablica 2.2. *Kodna tablica za odgovore na zadatak* za *odgovore na zadatak* MFC505

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC505**
	Točan odgovor	
20	Zadatak 1 i zadatak 3 (ili zadatak 3 i zadatak 1)	
	Djelomično točan odgovor	
10	Zadatak 1 jedino točan (uz ili bez zadataka 2. i 4.) *Primjeri:* • *Zadatak 1 i zadatak 2 (ili 2 i 1).* • *Zadatak 1 i zadatak 4 (ili 4 i 1).* • *Zadatak 1 i zadatak __ (prazno).*	
11	Zadatak 3 jedino točan (uz ili bez zadataka 2 i 4). *Primjeri:* • *Zadatak 3 i zadatak 2 (ili 2 i 3).* • *Zadatak 3 i zadatak 4 (ili 4 i 3).* • *Zadatak 3 i zadatak __ (prazno).*	
	Netočan odgovor	
70	Označen barem jedan zadatak, od čega **nijedan nije zadatak 1 ni zadatak 3.** *Primjeri:* • *Zadatak 2 i zadatak 4 (ili 4 i 2).* • *Zadatak 2 i zadatak __ (prazno).* • *Zadatak 4 i zadatak __ (prazno).*	
79	Ostali netočni odgovori(uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).	
	Bez odgovora	
99	Prazno.	

2.1.2. Razlomci i decimalni brojevi

Zadacima koji slijede od budućih učitelja razredne nastave očekuje se razumijevanje i korištenja koncepata vezanih uz prirodne i decimalne brojeve te upotreba matematičkih metodičkih modela, kao što su modeli mjernih jedinica, modeli površine, modeli skupova objekata i slično.

Zadatak 2.1.2. (MFC208A, MFC208B)

Josip je primijetio da kad u kalkulator upiše $0.2 \cdot 6$ dobije rezultat koji je manji od 6, a kad upiše $6:0.2$, dobije broj koji je veći od 6. To ga je zbunilo pa je od učiteljice zatražio novi kalkulator.

(a) Što je zbunilo Josipa?

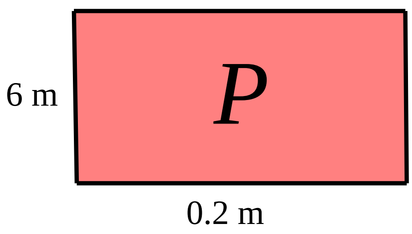
(b)	Grafički prikaži modele koje učitelj može iskoristiti kako bi pomogao Josipu da shvati ZAŠTO je rezultat množenja $0.2 \cdot 6$ takav kakav jest.

Odgovor. U ovom zadatku od budućih se učitelja očekuje razumijevanje koncepta decimalnih brojeva te množenja decimalnog broja prirodnim brojem i dijeljenja prirodnog broja decimalnim brojem.

Potrebno je uočiti da je kod množenja prirodnog broja pozitivnim decimalnim brojem manjim od 1 rezultat množenja uvijek broj koji je manji od tog prirodnog broja. U slučaju dijeljenja prirodnog broja decimalnim brojem manjim od 1, rezultat dijeljenja uvijek je veći od tog prirodnog broja. Drugim riječima, za $n \in \mathbb{N}$ i $0 < a < 1$ vrijedi $0 < a \cdot n < 1 \cdot n = n$ i $n : a > n : 1 = n$. Ovaj je zadatak svrstan u kognitivnu domenu *Rasuđivanje.*

Uzrok Josipovoj miskoncepciji nalazi se u činjenici da je u svom prethodnom matematičkom obrazovanju računao samo u skupu prirodnih brojeva oslanjajući se na modele skupova objekata. Pritom se pri množenju (kao uzastopnom zbrajanju jednakih pribrojnika) rezultat uvijek povećavao, a pri dijeljenju (kao uzastopnom oduzimanju jednakih članova) uvijek smanjivao, što je uvijek zorno ilustrirano fizičkim i grafičkim modelima.

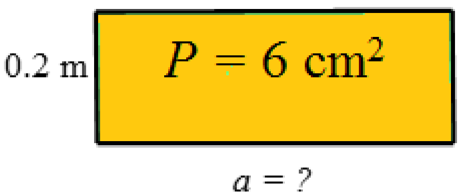
Umnožak $0.2 \cdot 6$ i količnik $6 : 0.2$ ne možemo modelirati uzastopnim zbrajanjem, odnosno oduzimanjem u skupu objekata. Modeli za ove konkretne brojevne izraze su model površine pravokutnika i pripadni model (pretvorbe) mjernih jedinica, npr.



$$\begin{aligned} P &= 0.2\text{ m} \cdot 6\text{ m} \\ &= 2\text{ dm} \cdot 60\text{ dm} \\ &= 120\text{ dm}^2 = 1.2\text{ m}^2 \end{aligned}$$

Slika 2.5. *Pravokutnik 1*

odnosno,



$$\begin{aligned} a &= 6\text{ m}^2 : 0.2\text{ m} \\ &= 600\text{ dm}^2 : 2\text{ dm} \\ &= 300\text{ dm} \\ &= 30\text{ m} \end{aligned}$$

Slika 2.6. *Pravokutnik 2*

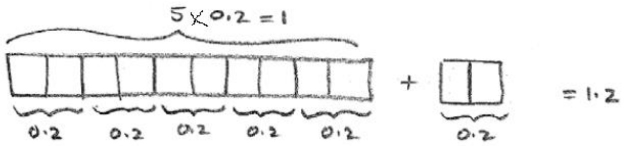
Nakon apstrahiranja dolazi se do sljedećeg matematičkog računa: $0.2 \cdot 6 = 1.2$ i $6 : 0.2 = 30$. Osim postavljanja brojevnih rečenica, moguće je da će učenici postavljene zadatke rješavati i grafičkom metodom (crtanjem). Postotak točno riješenih zadataka bio je 20%, a postotak djelomično točno riješenih zadataka bio je 12%.

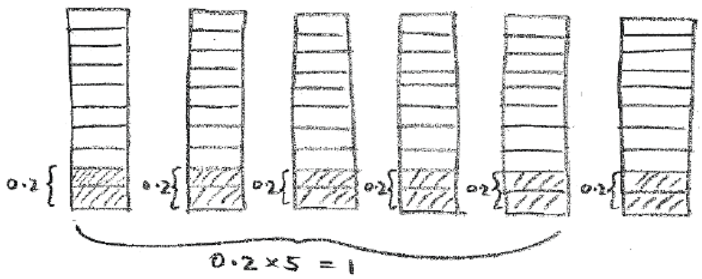
Tablica 2.3. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC208A*

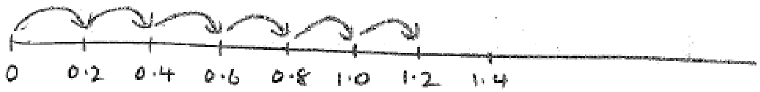
Kôd	Odgovor	Zadatak: MFC208A
	Točan odgovor	
20	Odgovori koji sugeriraju da je zabuna u mišljenju da množenje uvijek daje veći rezultat, a dijeljenje uvijek daje manji rezultat. *Primjer:* • *On misli da kad se množi, rezultat treba biti veći, a kad se dijeli rezultat treba biti manji.*	
	Djelomično točan odgovor	
10	Odgovori koji sugeriraju da je zabuna u mišljenju da množenje uvijek daje veći rezultat, a dijeljenje uvijek daje manji rezultat, ali ne i oboje. *Primjer:* • *On misli da kad se množi rezultat treba biti veći od jednog/oba broja.* • *On misli da kad se dijeli rezultat treba biti manji od početnih brojeva.*	
11	Odgovori koji sugeriraju da Josip smatra da je 0.2 cijeli broj. *Primjer:* • *On misli da množi i dijeli s 2, a ne s 0.2.*	
	Netočan odgovor	
70	Odgovori povezani s razumijevanjem decimalnih brojeva, dijeljenja i množenja decimalnih brojeva i upotrebe kalkulatora. *Primjer:* • *On ne zna množiti (dijeliti) decimalne brojeve.* • *On ne zna koristiti kalkulator.* • *Matematičke operacije.* • *Decimalna točka.*	
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).	
	Bez odgovora	
99	Prazno.	

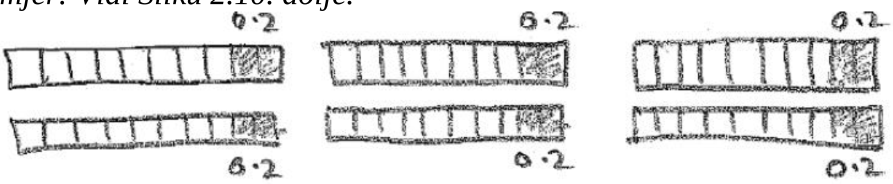
U drugom dijelu zadatka očekuje se poznavanje i konkretna primjena različitih modela pomoću kojih učenici otkrivaju operaciju množenja prirodnog broja decimalnim brojem manjim od 1. Ispitanicima su predočeni model površine i model duljine. Istraživanjem je očito zanemarena različita interpretacija umnožaka $0.2 \cdot 6$ i $6 \cdot 0.2$, odnosno umnožak $0.2 \cdot 6$ interpretirao se (primjenom komutativnosti množenja) jednako kao umnožak $6 \cdot 0.2$. Odgovor je dan u kodnoj tablici. Međunarodni prosjek točno riješenih zadataka bio je 16%, a prosjek djelomično točno riješenih zadataka bio je 16%.

Tablica 2.4. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC208B*

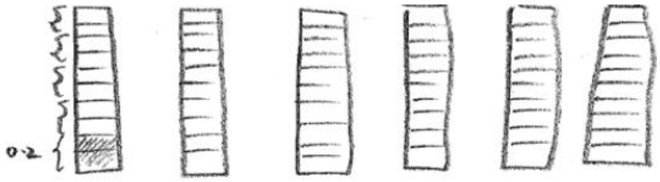
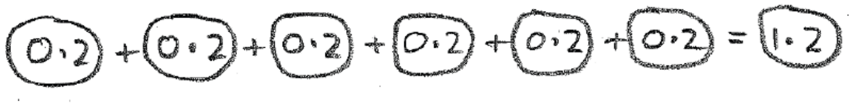
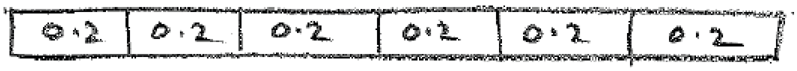
<table>
<tr><th>Kôd</th><th>Odgovor</th><th>Zadatak: MFC208B</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Točan odgovor</td></tr>
<tr><td>20</td><td colspan="2">Prikladan grafički prikaz koji jasno pokazuje zašto je 0.2 · 6 jednako 1.2,
Primjer:
• Iz 6 dijelova veličine 0.2 očito je da 5 takvih dijelova daje jedno cijelo, uz prikladan grafički prikaz.
Vidi Slike 2.7.,2.8. i 2.9. dolje.


Slika 2.7. Grafički prikaz 1


Slika 2.8. Grafički prikaz 2


Slika 2.9. Grafički prikaz 3</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Djelomično točan odgovor</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2">Grafički prikaz koji pokazuje 6 dijelova veličine 0.2, ali NE prikazuje jasno zašto je to jednako 1.2. Prihvaća se ako je 0.2 prikazano kao jedna petina ili dvije desetine.
Primjer: Vidi Sliku 2.10. dolje.


Slika 2.10. Grafički prikaz 4</td></tr>
<tr><td>11</td><td colspan="2">Grafički prikaz koji pokazuje da 5 dijelova veličine 0.2 čini jedno cijelo, ali NE prikazuje da je 6 dijelova od 0.2 jednako 1.2.
Primjer: Vidi Sliku 2.11. dolje.</td></tr>
</table>

	 Slika 2.11. *Grafički prikaz 5*
12	Grafički prikaz jednakosti $0.2 \cdot 6 = 1.2$ bez prikaza zašto je to istinito. *Primjer: Vidi Sliku 2.12. dolje.*  Slika 2.12. *Grafički prikaz 6*
	Netočan odgovor
70	Grafički prikaz koji pokazuje 6 dijelova od 0.2 bez prikaza što je 0.2 ili da je 5 dijelova veličine 0.2 jednako jedno cijelo. *Primjer: Vidi Sliku 2.13. dolje.*  Slika 2.13. *Grafički prikaz 7*
71	Primjer riječima koji sugerira brojanje dijelova veličine 0.2. *Primjer:* • *„Broji 6 dijelova od 0.2 na sljedeći način:* 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2." Napomena: Ovo je dobra strategija učenja, ali nije grafički prikaz.
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne oznake ili oznake nevezane za zadatak). *Primjer: Jednadžba ili napisani račun oblika* $0.2 \cdot 6 = 1.2$.
	Bez odgovora
99	Prazno

Decimalnim brojevima posvećen je i sljedeći zadatak.

Zadatak 2.1.3. (MFC304)

Koliko je decimalnih brojeva između 0.20 i 0.30?

Označi jedan kvadratić

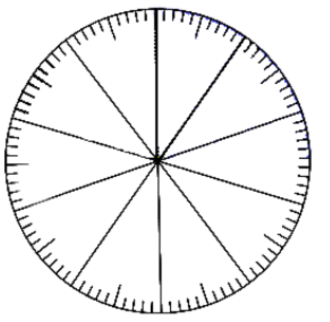
A. 9 ☐

B. 10 ☐

C. 99 ☐

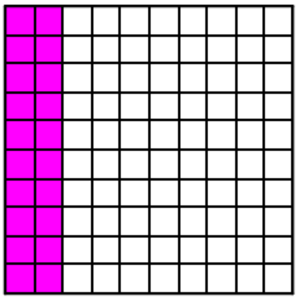
D. Beskonačno ☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se koncept decimalnog broja, uređaja na skupu decimalnih brojeva. U pozadini odgovora na postavljeno pitanje nalazi se gustoća skupa racionalnih brojeva u skupu $\mathbb{R}$ pa ovo može poslužiti stjecanju uvida u učeničku predkoncepciju o tom konceptu. Zadatak je svrstan u kognitivnu domenu *Znanje*. Uobičajeni grafički model koji u školama služi vizualizaciji decimalnog broja jest kvadratna mreža 10×10, kao na slikama 2.14., 2.15. i 2.16. Uz nju, upotrebljava se još i tzv. postotni krug, no on nije pogodan za rješavanje ovog zadatka.



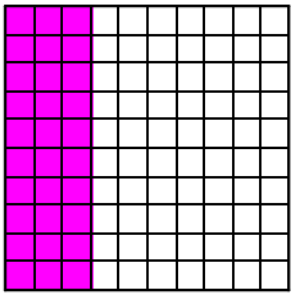
Slika 2.14. *Postotni krug*

Broj 0.20 može se u kvadratnoj mreži 10×10 prikazati kao Slici 1.5., gdje 1 kvadratić predstavlja 100 – ti dio cijelog kvadrata, tj. broj 0.01, odnosno $\frac{1}{100}$, a 20 kvadratića predstavlja $\frac{20}{100}$, tj. 0.20.



Slika 2.15. *Kvadratna mreža 0.20*

Na analogan način na donjoj slici prikazan je broj 0.30:



Slika 2.16. *Kvadratna mreža 0.30*

Oslanjajući se samo na ovaj grafički prikaz i na kvadratić kao nedjeljivi „atom“, odnosno na decimalne brojeve s dvije decimale, učenici bi mogli (pogrešno) zaključiti da između 0.20 i 0.30 ima 9 ili 10 decimalnih brojeva, i to 0.21, 0.22, …, 0.29, odnosno 0.20, 0.21, …, 0.29 ili 0.21, 0.21, …, 0.30, ovisno o tome je li uključen ili isključen jedan od „rubnih“ brojeva 0.20 ili 0.30. Ove miskoncepcije obuhvaćene su distraktorima A. i B.

S druge strane, moguća interpretacija distraktora C. jest uočavanje da su svakom od dvaju zadanih decimalnih brojeva 0.20 i 0.30 može dopisati još jedna nula na mjesto tisućinki, bez promjene vrijednosti, što vodi uočavanju 99 decimalnih brojeva 0.201, …, 0.299 između 0.200 i 0.300. Naravno, točan odgovor je D. jer možemo pripisati bilo koji broj nula, tj. svaki od kvadratića kvadratne mreže 10×10 možemo podijeliti na 10 sukladnih pravokutnika, svaki takav opet na 10 sukladnih kvadratića i taj proces možemo neograničeno nastaviti. Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 54%.

2.1.3. Proporcionalnost

U nastavku dajemo zadatak u kojem se od budućih učitelja primarne razine obrazovanja očekuje matematičko sadržajno znanje vezano uz koncept proporcionalnosti.

Zadatak 2.1.4. (MFC206A, MFC206B)

(a) Stroj potroši 2.4 litre goriva za 30 sati rada.

Koliko će litara taj stroj potrošiti za 100 sati rada radeći jednakim ritmom?

Označi jedan kvadratić

A. 7.2 ☐

B. 8.0 ☐

C. 8.4 ☐

D. 9.6 ☐

(b) Osmislite problem istog tipa kao problem (a) (isti procesi i operacije) koji će učenici osnovne škole lakše riješiti.

Odgovor. U školama se primjenjuju različite tehnike rješavanja zadataka poput (a), od čisto aritmetičkih, svođenjem na jediničnu veličinu, do čisto algebarskih, postavljanjem razmjera i određivanjem nepoznate veličine u njemu. Svođenje na jedinicu pristup je kojim se osvještava koncept proporcionalnosti, a posebice faktor, odnosno koeficijent proporcionalnosti. Tim pristupom, rješavanje ovog zadatka sastoji se u određivanju potrošnje stroja u jednom satu kao 2.4 : 30 = 0.08 litara, a zatim tijekom 100 sati rada multipliciranjem $100 \cdot 0.08 = 8$ litara. Na ovaj način, određena je i potrošnja stroja po satu. S druge strane, označimo li traženi broj potrošenih litara goriva u 100 sati rada s x te postavimo razmjer $2.4 : 30 = x : 100$, rješavanjem jednadžbe dobivamo $x = \frac{2.4 \cdot 100}{30} = \frac{24}{3} = 8$ litara. Ovim pristupom gubi se dodatna informacija o jediničnoj potrošnji, a rješavanje se svodi na proceduru. Ovim dijelom postavljenog zadatka ispitivana je srednja kognitivna razina, *Primjena,* unutar matematičkog sadržajnog znanja proporcionalnosti. Točan je odgovor B**.** Postotak riješenosti bio je 78%.

Drugi dio zadatka odnosi se na matematičko metodičko znanje ispitanika, odnosno uočavanje elemenata ovog zadatka te doprinosa tih elemenata njegovoj zahtjevnosti. Zadatak svakako otežava prisustvo decimalnog broja 2.4 s kojim je potrebno računati te izvršiti dvije računske operacije (dijeljenje i množenje). One bi bile lakše da se na mjestu broja 2.4. nalazi djelitelj broja 30, npr. broj 3, 6, 9 itd. Umjesto 2.4. mogao bi se staviti i višekratnik broja 30, npr. 60, 120 i sl., no time se u pitanje dovodi realističnost postavljenog zadatka. Zadatak bi bio još jednostavniji ukoliko bi jedna od operacija, npr. dijeljenje mogla biti izbjegnuta. U tom slučaju, broj 100 trebao bi biti zamijenjen višekratnikom broja 30 ili obrnuto, broj 30 zamijenjen djeliteljem broja 100.

Primjeri jednostavnijeg prvog tipa su:

- Stroj potroši 6 litara goriva za 30 sati rada. Koliko će litara goriva potrošiti za 100 sati rada?
- Stroj potroši 10 litara goriva za 30 sati rada. Koliko će litara goriva potrošiti za 100 sati rada?
- Stroj potroši 60 litara goriva za 30 sati rada. Koliko će litara goriva potrošiti za 100 sati rada?

Slijede primjeri pojednostavljivanja drugog tipa:

- Stroj potroši 2.4 litara goriva za 30 sati rada. Koliko će litara goriva potrošiti za 90 sati rada?
- Stroj potroši 2.4 litara goriva za 30 sati rada. Koliko će litara goriva potrošiti za 120 sati rada?

Konačno, primjeri pojednostavljenja trećeg tipa su:

- Stroj potroši 2.4 litara goriva za 10 sati rada. Koliko će litara goriva potrošiti za 100 sati rada?

- Stroj potroši 2.4 litara goriva za 25 sati rada. Koliko će litara goriva potrošiti za 100 sati rada?

Postotak ispitanika koji su točno riješili ovaj zadatak bio je 54%. U nastavku dajemo kodnu tablicu prema kojoj su kodirani odgovori ispitanika.

Tablica 2.5. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC206B*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC206B**
	Točan odgovor	
10	Problem istog tipa (isti procesi i operacije), ali lakši za riješiti. *Primjeri:* • *Stroj potroši 3 litre goriva za 30 sati rada. Koliko će litara goriva potrošiti za 100 sati rada?* • *Auto potroši 2.4 litre goriva za 50 km. Koliko će litara goriva potrošiti za 100 km?*	
	Netočan odgovor	
70	Problem istog tipa (isti procesi i operacije) koji nije lakši za rješavanje. (Napomena: Zadaci procijenjeni kao zadaci jednake težine nisu lakši.) *Primjeri:* • Stroj potroši 2 litre goriva za 30 sati rada. Koliko litara goriva će stroj potrošiti za 100 sati rada? *(2 nije djeljivo s 3)* • Cijev ispusti 2 litre vode dnevno. Koliko je to mililitara u sekundi? (zahtijeva znanje mjernih jedinica i računsko opterećenje je znatno veće)	
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne oznake ili oznake nevezane za zadatak) Primjer: • *Pitanja koja nemaju smisla/nemaju odgovor.*	
	Bez odgovora	
99	Prazno.	

2.1.4. Iracionalni brojevi

Slijedi zadatak u kojem se budućim učiteljima primarne razine obrazovanja ispituje matematičko sadržajno znanje vezano uz koncept iracionalnog broja.

Zadatak 2.1.5. (MFC503A, MFC503B, MFC503C, MFC503D)

Za svaki broj odredite je li racionalan ili iracionalan.

Označi jedan kvadratić u svakom retku

	Racionalan	***Iracionalan***
A. π	☐	☐
B. 2	☐	☐

C. $\sqrt{49}$	☐	☐
D. $-\frac{3}{2}$	☐	☐

Odgovor. U ovom zadatku ispituje se razumijevanje koncepta iracionalnog broja kao decimalnog broja zapisa s beskonačno mnogo decimala koje se ne ponavljaju periodično. Zadatak pripada kognitivnoj razini *Znanje*.

U pitanju A. ispituje se činjenično znanje o broju π kao iracionalnom broju, odnosno memoriranje činjenice da je π iracionalan (najniža taksonomijska razina), odnosno memoriranje na primarnoj razini obrazovanja. Za pitanje B. potrebno je poznavati odnos skupa $\mathbb{N}$ i skupa $\mathbb{Q}$, tj. prepoznati broj 2 kao prirodan broj i kao racionalan broj ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$). U pitanju C. potrebno je znati da broj $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$, može pripadati skupu prirodnih brojeva i znati korjenovati broj 49, što je također činjenično znanje. Konačno, u pitanju D. ispituje se osnovno poznavanje skupa $\mathbb{Q}$ i način zapisivanja racionalnih brojeva u razlomačkom zapisu. Dakle, racionalni brojevi su brojevi $2, \sqrt{49}$ i $-\frac{3}{2}$, dok je π iracionalan broj. Postotci riješenosti za pitanja A. – D. bili su 74%, 89%, 69%, 42% redom. Začuđujuća je slaba riješenost pitanja D. Jedna moguća interpretacija naglašena uloga pozitivnih racionalnih brojeva u razlomačkom zapisu tijekom matematičkog obrazovanja. Ispitanike je, moguće, zbunio negativan predznak racionalnog broja u razlomačkom zapisu.

2.2. Geometrija i mjerenje

Sadržajna domena *Geometrija i mjerenje* podijeljena je na poddomene *Geometrijski likovi*, *Geometrijsko mjerenje* te *Oblik i prostor*. Objavljeni zadaci obuhvaćaju po jedan zadatak iz svake od navedenih poddomena.

U zadacima koji ispituju matematičko metodičko znanje od budućih se učitelja primarne razine obrazovanja očekuje znanje vezano uz koncept mjere i koncept volumena. Također se očekuje da budući učitelji znaju odabrati i upotrijebiti različite modele i pristupe pri rješavanju matematičkih problema te metodički objasniti i predstaviti matematičke koncepte. U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko sadržajno znanje očekuje se poznavanje koncepta površine, koncepta volumena, odnosa među vrstama četverokuta te prepoznavanja mreža geometrijskih tijela.

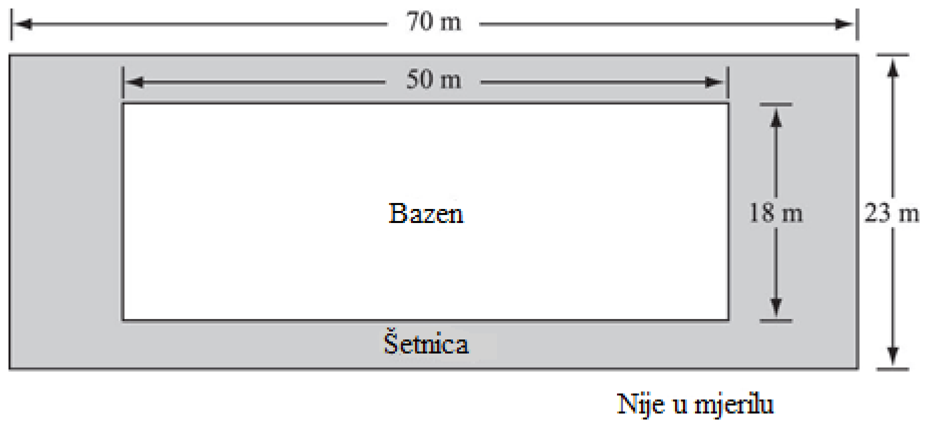
2.2.1. Geometrijski likovi

U nastavku dajemo dva zadatka u kojima se od budućih učitelja primarnog obrazovanja ispituje matematičko sadržajno znanje vezano uz koncept površine geometrijskog lika (pravokutnika) te uspostavljanje odnosa i veza među klasama geometrijskih likova (vrstama četverokuta prema njihovim svojstvima).

Zadatak 2.2.1. (MFC203)

Pravokutni bazen ima popločanu šetnicu (zatamnjeni dio na slici).

Kolika je površina šetnice?



Označi jedan kvadratić

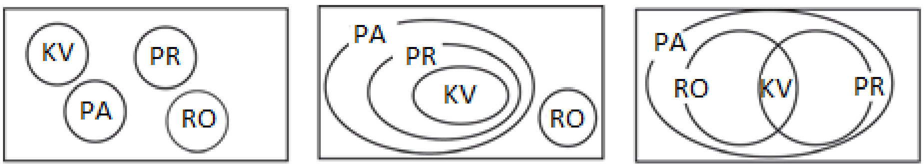
A. 100 m^2 ☐
B. 161 m^2 ☐
C. 710 m^2 ☐
D. $1\,610 \text{ m}^2$ ☐

Odgovor. U ovom zadatku, koji pripada kognitivnoj razini *Primjena*, ispituju se koncept i račun površine pravokutnika. Pri njegovom rješavanju potrebno je koristiti metodu promjene fokusa pa ćemo zadatak riješiti tako da prvo izračunamo površinu pravokutnika unutar kojega se nalaze šetnica i bazen (vanjskog pravokutnika), a zatim od te površine oduzeti površinu pravokutnika koji označava površinu bazena. Površina pravokutnika unutar kojega se nalaze šetnica i bazen jednaka je umnošku duljina dviju susjednih stranica vanjskog pravokutnika, odnosno, jednaka je $23 \cdot 70 = 1\,610 \text{ m}^2$. Površina bazena jednaka je umnošku duljina dviju susjednih stranica unutarnjeg pravokutnika koji označava površinu bazena, odnosno jednaka je $18 \cdot 50 = 900\,\text{m}^2$. Površina šetnice jednaka je razlici tih dviju površina, odnosno jednaka je $1610 - 900 = 710\ \text{m}^2$. Točan odgovor je odgovor **C**. Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 67%.

Množenje razlike odgovarajućih duljina stranica vanjskog i unutarnjeg pravokutnika, odnosno $(70-50)\cdot(23-18) = 20\cdot 5 = 100\ \text{m}^2$ vodi do distraktora A. Zbrajanjem svih duljina koje su dane na slici, dobije se $70+50+23+18=161\,\text{cm}^2$, čime možemo objasniti ulogu distraktora C. Distraktor D. dobije se izračunom površine vanjskog pravokutnika bez oduzimanja površine unutarnjeg pravokutnika.

Zadatak 2.2.2. (MFC204)

Tri učenika nacrtala su Vennove dijagrame kao na donjoj slici, prikazujući odnos između četiri vrste četverokuta: pravokutnika (PR), paralelograma (PA), rombova (RO) i kvadrata (KV).



Tin Rina Mia

Čiji je dijagram korektan?

Označi jedan kvadratić

A. Tinov ☐
B. Rinin ☐
C. Mijin ☐

Odgovor. U ovom zadatku potrebno je uspostaviti odnose i veze među klasama geometrijskih likova, tj. razvrstati i povezati četverokute prema njihovim svojstvima. Kognitivna razina ovog zadatka je *Znanje*. Uspostava hijerarhijskih odnosa među svojstvima geometrijskih oblika spada u treću taksonomijsku razinu Van Hieleove teorije razvoja geometrijskog mišljenja, tzv. razinu neformalne dedukcije. Pritom Van Hiele razlikuje pet razina geometrijskog mišljenja, među kojima ključnu razliku predstavlja način na koji smo u stanju misliti o geometrijskim oblicima. Razina 0 je razina vizualizacije u kojoj su objekti mišljenja oblici i njihov izgled, a proizvod mišljenja su klase ili grupe oblika koji izgledaju „slično“. Na razini 1, tzv. analizi, objekt mišljenja su klase oblika, dok je proizvod mišljenja svojstvo geometrijskog oblika. Razina 2 je razina neformalne dedukcije gdje je objekt mišljenja svojstvo oblika, a proizvod mišljenja su odnosi među tim svojstvima. Na trećoj razini, tzv. razini dedukcije, objekt mišljenja su odnosi među svojstvima geometrijskih oblika, dok su proizvod mišljenja deduktivni aksiomatski sustavi geometrije. Konačno, na posljednjoj, četvrtoj razini, objekt mišljenja su odnosi među svojstvima geometrijskih oblika, dok su proizvod mišljenja usporedbe i odnosi među različitim aksiomatskim sustavima geometrije. Od budućih učitelja primarne razine obrazovanja, očekivali bismo barem razinu neformalne dedukcije.

Slika prvog učenika (Tin) ukazuje na njegovu dominantno vizualnu pojavnu predodžbu o zadanim četverokutima, koja se oslanja na njihove tipične prototipove, dok se svojstva zanemaruju. Klase su potpuno odvojene jer likovi u njima „ne izgledaju jednako". Takav učenik nalazi se na Van Hieleovoj razini vizualizacije.

Druga slika (Rina) ukazuje na djelomičnu uspostavu odnosa i veza zadanih četverokuta jer su na njoj dobro nacrtani odnosi kvadrata, pravokutnika i paralelograma. Međutim, problem nastaje pri povezivanju ovih klasa s klasom rombova budući da ona obuhvaća klasu kvadrata, ili ne i klasu pravokutnika. Problem klasifikacije u ovom zadatku predstavljaju i odnosi među skupovima jer je potrebno kombinirati relaciju „biti podskup", odnosno „biti nadskup" sa skupovnim operacijama, konkretno s presjekom skupova.

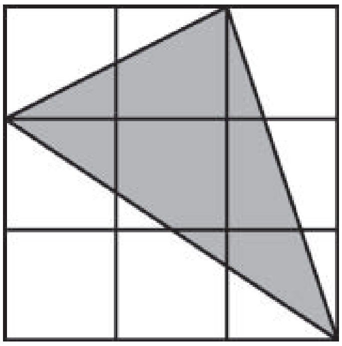
Treća slika (Mia) je korektno nacrtana. Paralelogram možemo opisati kao četverokut kojemu su nasuprotne stranice paralelne, pravokutnik možemo opisati kao paralelogram s četiri prava kuta, dok je romb paralelogram kojemu su sve stranice jednake duljine. Iz toga slijedi da su romb i pravokutnik specijalne vrste paralelograma. Konačno, kvadrat možemo opisati kao pravokutnik kojemu su sve stranice jednake duljine ili kao romb čiji su svi kutovi pravi. Dakle, kvadrat je specijalan slučaj romba, ali i specijalan slučaj pravokutnika. Točan odgovor je odgovor C. Postotak riješenosti bio je 61%.

2.2.2. Geometrijska mjerenja

U poddomeni *Geometrijska mjerenja* dajemo četiri zadatka u kojima se budućim učiteljima primarne razine obrazovanja ispituje matematičko sadržajno i metodičko znanje vezano uz koncept površine pravokutnog trokuta te vladanje prostornim zorom i konceptom volumena geometrijskih tijela.

Zadatak 2.2.3. (MFC408)

Površina svakog kvadratića unutar kvadrata iznosi 1 cm^2.



Kolika je površina (u cm^2) zatamnjenog trokuta?

Označi jedan kvadratić

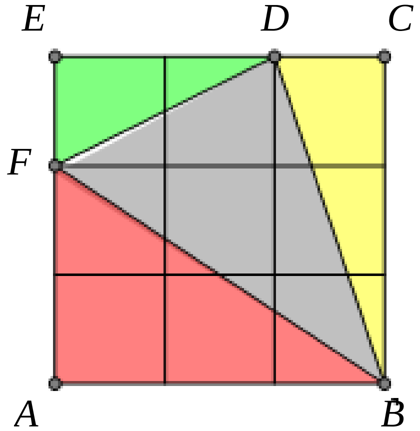
A. 3.5 cm^2 ☐

B. 4 cm^2 ☐

C. 4.5 cm^2 ☐

D. 5 cm^2 ☐

Odgovor. Ovaj zadatak rješava se metodom promjene fokusa i kategoriziran je u kognitivnu razinu *Primjena*. Od budućih učitelja očekuje se poznavanje i primjena izraza za površinu pravokutnog trokuta zadanog duljinama svojih kateta. Površina takvog trokuta jednaka je polovini umnoška duljina njegovih kateta.

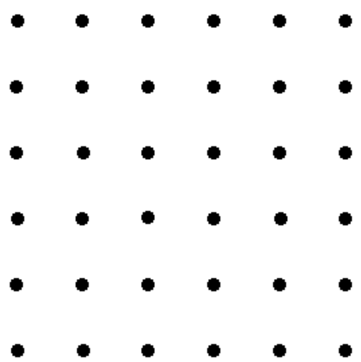


Slika 2.17. *Zadatak 2.1.8.*

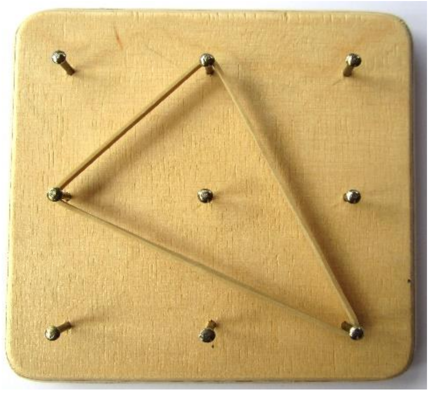
Na slici 2.17. uočimo pravokutne trokute ΔABF, ΔBCD i ΔDEF. Izračunamo li površinu tih trokuta i oduzmemo je od površine kvadrata *ABCE*, dobit ćemo traženu površinu trokuta ΔBDF. Iz teksta zadatka poznato je da je površina jednog naznačenog kvadratića unutar kvadrata *ABCE* jednaka 1 cm², iz čega slijedi da je $|EF| = |CD| = 1$ cm, $|AF| = |DE| = 2$ cm i $|AB| = |BC| = 3$ cm. Prema tome, površina P_1 pravokutnog trokuta ΔABF, jednaka je $P_1 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$, površina P_2 pravokutnog trokuta ΔBCD iznosi $P_2 = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1.5 \text{ cm}^2$, dok je površina P_3 pravokutnog trokuta ΔDEF jednaka je $P_3 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1 \text{ cm}^2$. Površina kvadrata *ABCD* jednaka je kvadratu duljine njegove stranice, odnosno broju jediničnih kvadratića te iznosi 9 cm². Traženu površinu *P* trokuta ΔBDF izračunat ćemo kao razliku površine kvadrata i površina prethodno analiziranih pravokutnih trokuta kao $P = P_k - P_1 - P_2 - P_3$.

Dakle, $P = 9 - 3 - 1.5 - 1 = 3.5 \text{ cm}^2$. Točan odgovor je odgovor **A.** Ovaj zadatak riješilo je 60% ispitanika. Ostali ponuđeni odgovori, tzv. distraktori, dobiju se procjenom rezultata. Lako se uoči da površina kvadrata u koji je dani trokut smješten iznosi 9 cm^2, prema čemu se procjenom približno može odrediti površina osjenčanog trokuta.

Zadatak se može riješiti i pomoću geoploče upotrebom Pickove formule za određivanje površine mnogokuta, no to se od budućih učitelja primarnog obrazovanja ne očekuje. Geoploča je metodički model koji se koristi u nastavi matematike. Sastoji se od mreže točaka kao na slici 2.18. koja može biti prikazana na papiru, no može se napraviti i od fizičkog materijala, npr. čavlići na ploči, kao na Slika 2.1819.

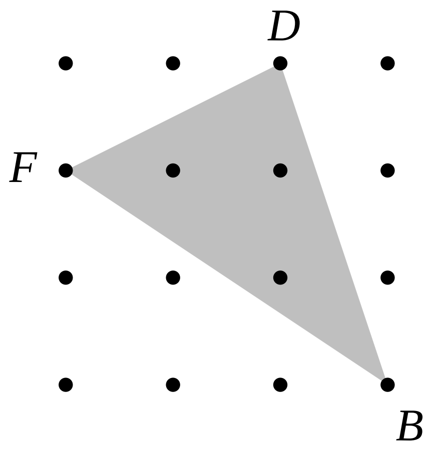


Slika 2.19. *Geoploča 1*



Slika 2.18. *Geoploča 2*

Likovima smještenima na geoploči, tj. onima kojima su vrhovi čvorovi mreže, lagano je odrediti površinu. U tome pomaže tzv. Pickova formula koja glasi $P = U + \frac{R}{2} - 1$, pri čemu je *P* površina mnogokuta, *U* broj točaka mreže koje pripadaju unutrašnjosti te *R* broj točaka mreže na rubu mnogokuta na geoploči. Pritom smatramo da je udaljenost susjednih točaka mreže u svakom retku i stupcu jedinična. Smjestimo zadani trokut na geoploču kao na slici 2.20.



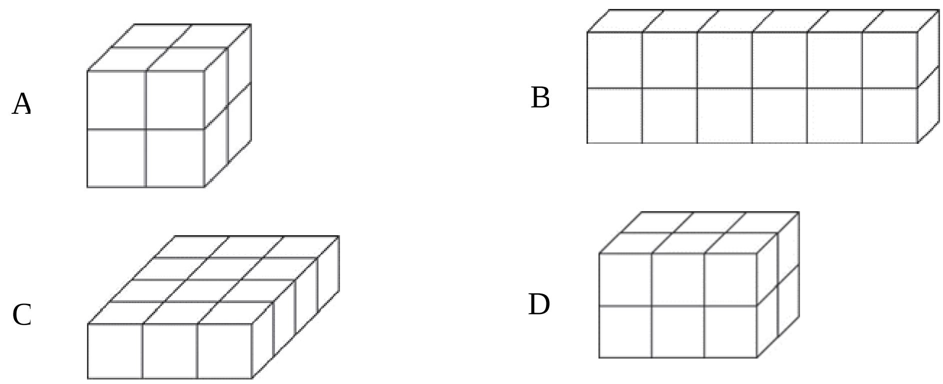
Slika 2.20. *Prikaz zadatka 2.1.8. u geoploči*

Iz slike odmah možemo uočiti da je $U=3$ i $R=3$, pa upotrebom Pickove formule slijedi da je površina trokuta ΔBDF jednaka $P=3+\frac{3}{2}-1=3.5\text{ cm}^2$.

Zadatak 2.2.4. (MFC307A, MFC307B)

Osnovnoškolcima je dan sljedeći zadatak:

Sve kockice su jednake veličine. Koja se skupina „građevina“ od kockica po volumenu razlikuje od ostalih?



(a) Koji je točan odgovor na ovo pitanje?

Označi jedan kvadratić

A. Skupina A ☐

B. Skupina B ☐

C. Skupina C ☐

D. Skupina D	☐
(b) Na koji se način prethodno pitanje može preformulirati bez da se upotrijebi riječ volumen?	

Odgovor. U ovom zadatku ispituje se prostorni zor i vladanje konceptom volumena geometrijskih tijela. Od budućih učitelja očekuje se povezivanje 3D prikaza objekta s njegovim 2D prikazom. Prema uvjetima zadatka, sve kockice na svim slikama jednake su veličine, što znači da su jednakog volumena. Označimo ga s V. Volumen građevine na svakoj slici jednak je zbroju volumena svih „osnovnih" kocaka od kojih je ta građevina sastavljena, tj. jednak je umnošku broja takvih kocaka i volumena V. Dakle, kako bismo odredili volumen svake građevine, dovoljno je odrediti broj „osnovnih" kocaka od kojih je izgrađena. Uočavamo da je na slici A. 8, a na slikama B., C. i D. 12 „osnovnih" kocaka, što znači da su odgovarajući volumeni jednaki redom

$$V_A = 8V,\ V_B = V_C = V_D = 12V.$$

Prema tome, točan je odgovor **A.** Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 78%.

U drugom dijelu zadatka od budućih učitelja očekuje se da znaju varirati tekst zadatka kako bi učenike nižih razreda osnovne škole naveli da otkriju koncept volumena prije nego otkriju njegov naziv i odgovarajuću mjernu jedinicu. Prihvatljivi odgovori dani su u Tablici 2.6. Postotak korektnih odgovora bio je 38%, a postotak djelomično točnih odgovora bio je 14%.

Tablica 2.6. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC307B*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC307B**
	Točan odgovor	
20	Preformulacija pitanja (a) u jednoznačno pitanje bez upotrebe riječi volumen. *Primjeri:* • *Koja se skupina kockica razlikuje od ostalih po broju kockica od kojih je sastavljena?* • *Sve male kockice su jednake mase. Koja se skupina kockica masom razlikuje od ostalih?*	
	Djelomično točan odgovor	
10	Pitanje bez upotrebe riječi volumen koje obuhvaća iste vještine ali je različito od pitanja (a): *Primjeri:* • *Koja skupina ima najmanje kockica?* • *Koja skupina zauzima najmanje prostora?*	
	Netočan odgovor	
70	Smisleno preformulirano pitanje koje obuhvaća vještine nevezane za volumen. *Primjer:*	

	• *Koja skupina ima najveće oplošje?*
71	Nejasno/loše definirano pitanje na koje se ne može odgovoriti. *Primjeri:* • *Koja se skupina veličinom razlikuje od ostalih? (*veličina je neodređen pojam*)* • *Koja skupina zauzima najviše prostora?(*tri skupine imaju jednak volumen) • *Jedna se skupina razlikuje od ostalih. Riješi misterij! (*Razlikuje na koji način?*)*
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne oznake ili oznake nevezane za zadatak)
	Bez odgovora
99	Prazno

Djelomično točni odgovori sugeriraju da je jedna skupina kockica sastavljena od manje kockica nego ostale skupine kockica, dok netočni odgovori ukazuju na problem s razumijevanjem pojma veličine i s nedostatkom razlikovanja obilježja. U netočnom odgovoru koji sugerira da se jedna skupina razlikuje od ostalih, početni zadatak se „otvara“ jer postoji različiti kriteriji prema kojima bi se dane skupine kockica mogle razlikovati.

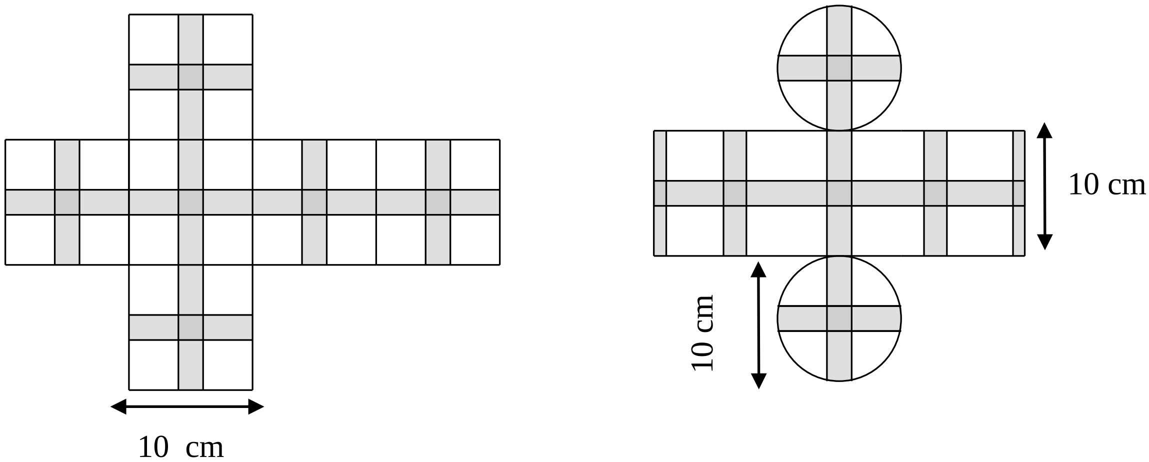
Zadatak 2.2.5. (MFC511)

Na donjoj slici prikazane su dvije kutije za poklone umotane vrpcom. Kutija A je oblika kocke brida duljine 10 cm. Kutija B je oblika valjka čiji su visina i promjer baze 10 cm.

Kutija A Kutija B

Za koju je kutiju potrebna dulja vrpca? Objasnite kako ste došli do tog odgovora.

Odgovor. U ispitivanju TEDS – M ovaj je zadatak svrstan u kognitivnu domenu *Rasuđivanje*. U njemu se od budućih učitelja primarne razine obrazovanja očekuje misaona vizualizacija na slici nevidljivih ploha koje omeđuju pojedinu kutiju, kao i dijelova vrpci priljubljenih uz te plohe. Za uspješno rješavanje zadatka potrebno je poznavanje mreža kocke i valjka i njihove veze sa zadanim mjerama (duljina brida kocke te visina i promjer baze valjka), kao i interpretacija duljine vrpce u kontekstu zadanih mjera. U zadatku je zapravo potrebno povezati dva dvodimenzionalna prikaza (prikaz u kosoj projekciji i mrežu) jednostavnih trodimenzionalnih oblika kocke i valjka.

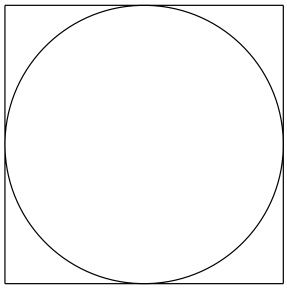


Slika 2.21. *Mreža kocke i valjka*

Uvidom u nacrtane mreže i na njima označene vrpce na Slici 2.21. uočavamo da je uz svaku stranu kocke priljubljen „križ“ od vrpce za koji je potrebno $10+10=20$ cm vrpce. Budući da kocka ima 6 strana, ukupna potrebna duljina vrpce je $6 \cdot 20 = 120$ cm. Uočimo da je duljina svake pruge „križa“ jednaka duljini brida kocke jer je vrpca postavljena paralelno s bridovima kocke.

Slično, duljinu vrpce potrebne za kutiju B odredit ćemo analizom nacrtane mreže. Odmah uočimo da je uz svaku od baza valjka priljubljen „križ“ od vrpce čiji su „krakovi“ duljina promjera te baze, tj. kruga. Dakle, za svaku bazu treba $10+10=20$ cm vrpce, tj. za omatanje obiju baza treba $2 \cdot 20=40$ cm vrpce. Nešto je složenije odrediti duljinu vrpce potrebne za zamatanje plašta valjka, koji je oblika pravokutnika. Duljina jedna njegove stranice, tj. horizontalne vrpce, jednaka je opsegu baze, a druga visini valjka. Kako je opseg jednak umnošku duljine promjera baze i broja π, duljina odgovarajuće vrpce paralelne s tom stranicom iznosi $10\,\pi \approx 31.4$ cm. Za zamatanje plašta trebaju još 4 trake duljine druge stranice pravokutnika, tj. duljine 10 cm, za što je potrebno ukupno $4 \cdot 10=40$ cm vrpce. Konačno, za zamatanje cijele kutije B treba približno $40+31.4+40=111.4$ cm vrpce. Prema tome, više je vrpce potrebno za zamatanje kutije A.

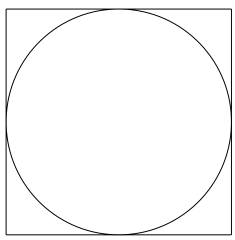
Prikazano rješenje uključuje poznavanje i povezivanje različitih matematičkih koncepata vezanih uz kvalitativna (oblik) i kvantitativna (mjere) obilježja trodimenzionalnih oblika. Međutim, zadatak se dao riješiti i bez računanja duljine vrpce, što se zapravo i nije tražilo. Bilo je potrebno uočiti da su obje kutije zamotane na isti način. S obzirom na mjere tih kutija, uočavamo da su dijelovi vrpce koji se odnose na omatanje njihovih baza jednake duljine, kao i dijelovi vrpce koji stoje vertikalno u prostoru. Jedina je razlika u horizontalnim dijelovima vrpci koji omataju pobočja. Kako kod kutije A ta vrpca opisuje kvadrat, a kod kutije B u taj kvadrat upisani krug (slika 23.), dulja je vrpca potrebna za kutiju A.



Slika 2.22. *Krug upisan kvadratu*

Postotak točnih rješenja bio je 19%, dok je zadatak djelomično točno riješilo 19% ispitanika. U nastavku dajemo kodnu tablicu prema kojoj su bodovani odgovori ispitanika.

Tablica 2.7. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC511*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC511**
	Točan odgovor	
20	„Za kutiju A“ , s korektnim i detaljnim objašnjenjem, uključujući računanje duljine vrpce. *Primjeri:* • *Za kutiju A potrebno je* $6 \cdot 20 = 120$ *cm vrpce. Za kutiju B potrebno je* $4 \cdot 20 = 80$ *cm za pobočje, a* 10π cm *za bazu. Budući da je* $10\pi < 40$, *za kutiju A potrebno je više vrpce.* • *Za kutiju A potrebno je više vrpce. Za kutiju A potrebno je* 120 *cm, a za kutiju B* 110 *cm (koristeći* $\pi = 3$*).*	
21	„Za kutiju A“, uz potpuno objašnjenje (s ili bez računa) uspoređivanjem kvadrata i kružnice (jednake širine), zajedno s uočenom činjenicom da su ostale vrpce jednake duljine. *Primjeri:* • *Za kutiju A jer je opseg kruga promjera 10 cm manji od opsega kvadrata stranice duljine 10 cm, a ostale duljine vrpce su jednake.* • *Za kutiju A. Kako je prikazano na donjoj slici, horizontalna vrpca oko valjka je kraća nego vrpca oko kocke. Ostale duljine vrpce su jednake. Zato kutiji B treba manje vrpce nego kutiji A.*  • *Za kutiju A. Opseg kruga je otprilike 31.4, a opseg kruga je 40. Za kutiju A treba više vrpce jer je duljina vrpce za preostali dio jednaka na obje kutije (80).*	

Napomena: Prihvaćaju se razumne aproksimacije broja π kao što su $3.14, 3.1, 3, 22/7$ itd.

	Djelomično točan odgovor
10	„Kutija A“, s korektnim i potpunim objašnjenjem kao u Kôdu 20, ali s jednom računskom pogreškom (ili uz korištenje pogrešne formule) koja vodi točnom odgovoru. *Primjer:* • *Za kutiju A jer za nju treba* 120 *cm, a za kutiju B treba* $60 + 10\pi < 120$.
11	„Kutija B“, s korektnim i potpunim objašnjenjem kao u kôdu 20, ali s jednom računskom pogreškom (ili uz korištenje pogrešne formule) koja vodi netočnom odgovoru. *Primjeri:* • $80 + 10\pi = 120.4$ *(umjesto 111.4)* > 120 • *Kutija B jer za kutiju A treba 120 cm vrpce, a za kutiju B treba* $80 + 25\pi > 120$. *(Korištena je formula za površinu umjesto formule za opseg kruga, ali s namjerom uspoređivanja opsega.)*
12	„Za kutiju A“, s objašnjenjem koje sadrži korektan račun i koje uspoređuje različite duljine vrpce za obje kutije, ali nije spomenuto da su ostale potrebne duljine vrpce jednake. *Primjer:* • *Za kutiju A treba više vrpce jer je opseg cilindra* 10π *što je manje od opsega kvadrata, 40.*
13	„Za kutiju A“, uz objašnjenje koje korektno podupire odabir kutije A, ali nedostaju detalji iz kôda 20 i 21. *Primjeri:* • *Za kutiju A jer kutija B može stati unutar kutije A.* • *Za kutiju A jer je opseg kruga manji od opsega kvadrata.* • *Za kutiju A. Može se vidjeti da je veća. Njena vrpca je duga 120 cm, a od kutije B bi bila manja.*
	Netočan odgovor
70	„Za kutiju A“, bez ikakvog objašnjenja ili računa. *Primjer: Za kutiju A.*
71	„Za kutiju A.“ ili „Za kutiju B.“, s objašnjenjem utemeljenom na konceptualnoj pogrešci. *Primjeri:* • *Za kutiju A, s objašnjenjem utemeljenim na površini ili volumenu.* • *Za kutiju A jer ima veći broj strana.*
72	„Za kutiju A.“ ili „Za kutiju B.“, s objašnjenjem utemeljenom na nekorektno/nedovršeno izračunatoj duljini vrpce za obje kutije. *Primjeri:* • *Za kutiju B jer za kutiju A treba 60 cm, a za kutiju B 80.*
73	„Za nijednu. Duljina vrpce je jednaka za obje kutije.“ *Primjer:* • *Duljina, širina i visina su jednake pa je potrebna jednaka duljina vrpce.*
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak) *Primjer:* • *Kutija B. bez objašnjenja ili računa.*
	Bez odgovora
99	Prazno

Zadatak 2.2.6. (MFC513)

<table>
<tr><td>Prvi sat nastave posvećen mjerenju dužine gospođa Horvatić započinje tako da učenicima zada zadatak da izmjere širinu svojih knjiga koristeći prvo spajalice, a potom olovke.
Navedite DVA razloga zbog kojih gospođa Horvatić odabire ovakav način poučavanja umjesto jednostavnog poučavanja učenika o korištenju ravnala?</td></tr>
</table>

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko metodičko znanje vezano uz razvoj koncepta duljine. Od budućih se učitelja primarne razine obrazovanja očekuje da kod učenika razviju razumijevanje pojma mjere, osvijeste uočavanje potrebe za standardnim mjernim jedinicama i odabir najprikladnije mjerne jedinice. Razlozi zbog kojih gospođa Horvatić odabire takav način poučavanja dani su u kodnoj tablici. Postotak točnih odgovora bio je 9%, a djelomično točnih 39%.

Tablica 2.8. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC513*

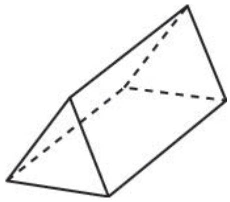
<table>
<tr><th>Kôd</th><th>Odgovor</th><th>Zadatak: MFC513</th></tr>
<tr><td colspan="3">Napomena: Važni i značajni razlozi
<u>Razlog 1: (Razumijevanje pojma mjere)</u> Korištenje sličnih/različitih mjera omogućuje razumijevanje koncepta mjere, da se svaki objekt/jedinica može izmjeriti te da je mjerilo na ravnalu samo ponavljanje jedinične mjere.
<u>Razlog 2: (Potreba za standardnim jedinicama)</u> Korištenje nestandardnih jedinica može, stvaranjem nepreciznosti u mjerenju, pokazati potrebu za standardnim/formalnim jedinicama i možda stvoriti prilike za raspravljanje o povijesnom razvoju mjere.
<u>Razlog 3: (Odabir najprikladnije jedinice)</u> Korištenje predmeta različite duljine pomaže učenicima da nauče odlučiti koja je mjerna jedinica najprikladnija za mjerenje dane dužine.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Točan odgovor</td></tr>
<tr><td>20</td><td colspan="2">Odgovori koji daju bilo koja dva od tri gore navedena važna i značajna razloga.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Djelomično točan odgovor</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2">Odgovori koji daju samo Razlog 1: (Razumijevanje pojma mjere)
Primjeri:
• Korištenje sličnih predmeta pri mjerenju omogućava učenicima da se usmjere na ideju mjerenja prije suočavanja s formalnim jedinicama i vještinom korištenja ravnala.</td></tr>
</table>

	• *Korištenje predmeta iz svakodnevnog života za mjerenje pokazuje da se sve može izmjeriti i čini mjeru kao pojam jednostavnijom za razumjeti jer nema apstraktne mjere za očitavanje.*
11	Odgovori koji daju samo Razlog 2: (Potreba za standardnom jedinicom) *Primjeri:* • *Korištenje nestandardnih jedinica različite duljine za mjerenje daje različite brojeve jedinica za istu dužinu i pokazuje potrebu za standardnim jedinicama.* • *Korištenje različitih jedinica za mjerenje, kao što su spajalice i olovke znači da će učenici dobiti različite odgovore za iste dužine i diskusijom o tome što mjera jest osvijestiti potrebu za zajedničkom mjerom i formalnijim sustavom mjerenja.*
12	Odgovori koji daju samo Razlog 3: (Odabir najprikladnije jedinice) *Primjeri:* • *Nastavnica želi da učenici uvide da trebaju razmisliti koja je jedinica najprikladnija za različite dužine. Na primjer, olovke će biti učinkovitije nego spajalice za dulje dužine. Spajalice će biti učinkovitije za kraće dužine. Koraci će biti bolji za dugačke dužine.* • *Ovo će pokazati da je veće dužine lakše mjeriti velikim jedinicama (olovkama), a manje dužine manjim jedinicama (spajalice).*
	Netočan odgovor
70	Odgovori koji su usmjereni na motivaciju, uživanje itd. *Primjeri:* • *Korištenje konkretnih materijala je zabavnije, motivirajuće, zanimljivo i poticajno.* • *Nije dosadno za učenike kad nastavnik koristi različite metode i pomaže.* • *Nastavnik zna da će učenici više uživati u radu ako koriste opipljive predmete.*
71	Odgovori koji su usmjereni na druge nepovezane i beznačajne aspekte. *Primjeri:* • *Korištenje poznatih predmeta, kao što su olovke, razvija vještine procjenjivanja.* • *Nastavnik želi osnažiti kreativnost omogućujući učenicima da mjere pomoću spajalica i olovaka.* • *Zato da učenici nauče kako mjeriti pomoću spajalica i olovaka.*
79	Ostali netočni (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne ili odgovore nevezane za zadatak)
	Bez odgovora
99	Prazno

2.2.3. Oblik i prostor

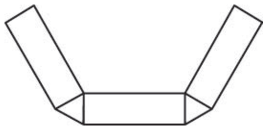
U sljedećem zadatku ispituje se matematičko sadržajno znanje budućih učitelja matematike primarnog obrazovanja vezano uz izgradnju trodimenzionalnog oblika na temelju njegovog dvodimenzionalnog prikaza.

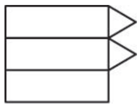
Zadatak 2.2.7. (MFC501)

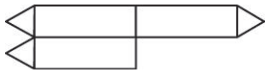


Koja mreža odgovara gornjoj slici?

Označi <u>jedan</u> kvadratić

A.  □

B.  □

C.  □

D.  □

Odgovor. U ovom zadatku od budućih učitelja se očekuje misaona izgradnja trodimenzionalnog oblika na temelju njegovog dvodimenzionalnog prikaza, tj. mreže. Zadatak je klasificiran u kognitivnu razinu *Znanje*. Na slici uz tekst zadatka dana je pravilna (uspravna) trostrana prizma. Njene su baze sukladni jednakostranični trokuti, a pobočje se sastoji od tri sukladna pravokutnika. Zbog neodgovarajućeg broja sukladnih trokuta u mreži (na slici ih je tri), odmah možemo eliminirati odgovor C. Misaonim savijanjem eliminiramo odgovor A. i odgovor B. Prema tome, točan je odgovor D. Postotak riješenosti bio je 85%.

2.3. Algebra i funkcije

Sadržajna domena *Algebra i funkcije* podijeljena je na poddomene *Geometrijski uzorci*, *Algebarski izrazi* te *Jednadžbe i nejednadžbe*. Objavljeni zadaci obuhvaćaju tri zadatka iz poddomene *Geometrijski uzorci*, sedam zadataka iz poddomene *Algebarski izrazi* te dva zadatka iz poddomene *Jednadžbe i nejednadžbe*.

U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko metodičko znanje, od budućih se učitelja primarne razine obrazovanja očekuje znanje vezano uz prepoznavanje geometrijskih uzoraka. Također se očekuje da budući učitelji znaju uspostaviti vezu i uočiti pravilnosti u nizu objekata koji se pravilno nadograđuju te razlikovati i koristiti metodičke modele koji su ključni u uvođenju koncepata jednadžbi i nejednadžbi u nastavi. U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko sadržajno znanje očekuje se uočavanje pravilnosti, provjera (ne)jednakosti izraza u kontekstu cijelih brojeva, korištenje modela vage jednakih krakova pri uvođenju koncepta jednadžbe, vladanje algebarskim izrazima za parne i neparne brojeve te prepoznavanje pravilnosti u danim geometrijskim uzorcima.

2.3.1. Geometrijski uzorci

U zadacima koji slijede od budućih učitelja primarne razine obrazovanja očekuje se uočavanje pravilnosti i uspostavljanje i razumijevanje veza i odnosa među prikazima danih geometrijskih uzoraka, oblikovanje cjeline njihovim nadovezivanjem te prevođenje uočenih pravilnosti u odgovarajuće algebarske izraze. Zbog svega navedenog, ovi su zadaci visoke kognitivne složenosti za ispitanika (razina *Rasuđivanje*).

Zadatak 2.3.1. (MFC108)

Ana štapićima gradi niz geometrijskih oblika prateći uzorak na donjoj slici. Svaki novi oblik sadrži jedan novi trokut. Varijabla t označava mjesto oblika u nizu.

U pronalaženju matematičkog opisa modela, Ana objašnjava svoje razmišljanje govoreći:

Koristim tri štapića za svaki trokut.

Tada vidim da jedan štapić brojim dva puta za svaki trokut, osim zadnjeg, pa takve štapiće moram izbaciti iz ukupnog zbroja.

Varijabla n predstavlja ukupan broj štapića korištenih u obliku. Koja od sljedećih jednakosti algebarski najbolje opisuje Aninu izjavu?

Označi jedan kvadratić

A. $n = 2t + 1$ ☐

B. $n = 2(t + 1) - 1$ ☐

C. $n = 3t - (t - 1)$ ☐

D. $n = 3t - 1 + t$ ☐

Odgovor. Osim uspostavljanja korektne algebarske veze rednog broja slike i broja štapića na toj slici, od budućih se učitelja očekuje i precizna algebarska interpretacija postupka izgradnje zadanog geometrijskog uzorka, tj. praćenje i algebraizacija Aninog (učeničkog) procesa zaključivanja. Prema podatcima u zadatku, varijabla n predstavlja ukupan broj štapića korištenih u pojedinom obliku, a varijabla t označava mjesto oblika u nizu. Kako Ana razmišlja, za svaki trokut potrebna su tri štapića. Svaki korak sadrži jedan novi trokut pa je broj štapića u svakom koraku jednak umnošku broja 3 i varijable t. Od tog umnoška potrebno je oduzeti broj štapića koji su ubrojeni dva puta. Broj tih štapića u svakom koraku ovisi o varijabli t i to na način da u prvom koraku treba oduzeti nula štapića, u drugom koraku jedan štapić, u trećem koraku dva štapića i tako dalje redom. Iz toga se može zaključiti da od izraza $3t$ treba oduzeti izraz $(t-1)$. Dakle, točan je odgovor C.

Uočimo da je $3t-(t-1)=2t+1$, što znači da su odgovori B. i C. pogrešni. Odgovor A eliminiran je zato što u njemu nije reproduciran Anin proces zaključivanja već samo rezultat tog procesa, tj. konačni rezultat. Važno je istaknuti da se u ovom zadatku očekivala općenita algebarska veza brojeva n i t, što podrazumijeva visok stupanj apstrakcije. Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 28%.

Zadatak 2.3.2. (MFC508)

Šibice su složene u oblike kao na slici.

Oblik 1 Oblik 2 Oblik 3

Ako bi se uzorak nastavio prema istom pravilu, koliko bi šibica trebalo za Oblik 10?

Označi jedan kvadratić

A. 30 ☐
B. 33 ☐
C. 36 ☐
D. 39 ☐
E. 42 ☐

Odgovor. Za razliku od prethodnog zadatka, ovaj se zadatak rješava primjenom analogije. Prvi oblik sastoji se od kvadrata i trokuta koji imaju jednu zajedničku stranicu. Za slaganje kvadrata potrebne su tri šibice, kao i za slaganje trokuta. Svaki sljedeći oblik sastoji se od prethodnog oblika i novog kvadrata koji nastaje dodavanjem triju šibica na zadnji kvadrat prethodnog oblika. Prvi način rješavanje ovog zadatka bio bi ispunjavanjem sljedeće tablice:

Tablica 2.9. *Broj šibica*

redni broj oblika	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**
broj šibica	6	9	12	15	18	21	24	27	30	**33**

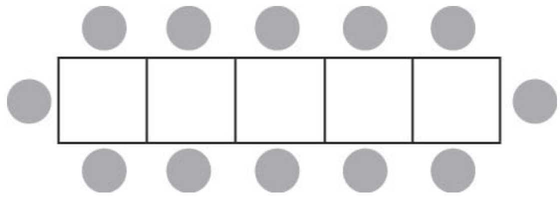
Ispisivanjem broja šibica u pojedinom obliku, imajući na umu da je taj broj u svakom koraku za tri veći od broja šibica u prethodnom koraku, dolazimo do broja 33, tj. do broja šibica potrebnog za slaganje Oblika 10.

Drugi način rješavanja je brojanje koliko na svakom uzorku ima horizontalno, vertikalno i koso postavljenih šibica. Uočavamo da se broj koso postavljenih šibica ne mijenja i uvijek je 2, da se broj horizontalnih šibica povećava za 2, a broj vertikalnih za 1. Dakle, broj šibica u svakom sljedećem obliku za 3 je veći od broja šibica u prethodnom obliku. Prvi se oblik sastoji od 6 šibica, a do desetog treba 9 puta dodati po 3 šibice. To znači da se Oblik 10 sastoji od $6+9\cdot 3=33$ šibice, što znači da je točan odgovor B.

Predloženim distraktorom, tj. pogrešnim odgovorom A. obuhvaćeni su ispitanici koji su odredili ili Oblik 9, tj. izostavili zadnji korak, ili su korektno izračunali broj šibica koje su dodaju trokutu u svih 10 koraka, a pritom su izostavili 3 šibice koje čine trokut. Odgovori B. i C. obuhvaćaju ispitanike koji su, umjesto za Oblik 10, odredili broj šibica za Oblik 11 ili Oblik 12, tj. izveli su jedan ili dva koraka više od zadanog. Konačno, odgovorom E. obuhvaćeni su ispitanici koji su uočili dodavanje novog kvadrata u svakom koraku, tj. $9 \cdot 4$ šibice do Oblika 10, što uz 6 šibica Oblika 1, daje ukupno $6+9\cdot4=6+36=42$ šibice. Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 74%.““

Zadatak 2.3.3. (MFC308)

Oko kvadratnog stola mogu sjediti 4 osobe, svaka na svojoj strani. Ako se 5 takvih stolova spoji kao na donjoj slici, onda oko njih može sjediti 12 ljudi, kako je i prikazano.



Koliko ljudi može sjediti oko *n* kvadratnih stolova kada su složeni tako da im se po jedna stranica dodiruje?

Napišite svoj odgovor koristeći varijablu *n*.

Odgovor. Za razliku od zadataka 2.3.1. i 2.3.2., u ovom se zadatku od ispitanika traži konstrukcija odgovora, što omogućava primjenu različitih strategija njegovog pronalaženja. Npr. do odgovora se moglo doći ovakvim zaključivanjem: Na čelu dugog stola od *n* spojenih stolova uvijek će sjediti dvoje ljudi, svatko na jednoj strani, dok će uz taj stol sa svake strane sjediti njih *n*, tj. ukupno $2+n+n=2n+2=2(n+1)$ ljudi.

Do istog odgovora moglo se doći i zaključivanjem da oko svakog od *n* stolova može sjediti četvero ljudi, tj. njih ukupno 4*n*, no spajanjem dva po dva takva stola gube se po dva sjedeća mjesta, osim na prvom i zadnjem stolu u nizu, kada se gubi po samo jedno mjesto. Gubitak je, dakle, $2n-4-1=2n-2$ mjesta, pa za dugi stol od *n* spojenih stolova može sjesti ukupno $4n-(2n-2)=4n-(2n-1)=2(n+1)$ ljudi. Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 49%.

Tablica 2.1. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC308*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC308**
	Točan odgovor	
20	$2n+2$ ili ekvivalentni izrazi. *Primjeri:* • $(n\cdot 2)+2$ • $2(n+1)$	

	• $4n - 2(n - 1)$
21	Korektno pravilo dano riječima. *Primjer:* • *n pomnožen brojem 2, zatim dodan broj 2*
	Djelomično točan odgovor
10	Korektno pravilo s pogrešnom upotrebom varijabli. Varijable **SU** definirane. *Primjeri:* • $n = 2x + 2$ *gdje je* x *= broj stolova* • $p = 2t + 2$ *gdje je* t *= broj stolova,* p *= broj ljudi*
11	Korektno pravilo s pogrešnom upotrebom varijabli. Varijable **NISU** definirane. *Primjeri:* • $2x + 2$ • $4x - 2(x - 1)$
12	Korektno pravilo dano riječima bez upotrebe varijable *n*. *Primjer:* • *Pomnoži brojem dva i dodaj dva.*
13	Pravilo iteriranja. Primjeri: • $P_n = P_{n-1} + 2$ • *Dodaj broj dva pri svakom dodavanju novog stola.*
	Netočan odgovor
70	Netočno pravilo riječima ili simbolima. *Primjer:* • $2n - 2$
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak)
	Bez odgovora
99	Prazno

Napomena: Nakon psihometrijske analize, u istraživanju TEDS – M zadatak je prekodiran. Kategorijama 20 i 21 dodijeljen je 1 bod, kategorijama 10 – 13 dodijeljeno je 0 bodova.

2.3.2. Algebarski izrazi

U sljedeća tri zadatka ispituje se matematičko sadržajno i metodičko znanje budućih učitelja primarne razine obrazovanja vezano uz svojstva računskih operacija te primjene djeljivosti u skupu cijelih brojeva.

Zadatak 2.3.4. (MFC202A, MFC202B, MFC202C, MFC202D)

Označite koja od sljedećih jednakosti vrijedi, odnosno ne vrijedi, za svako $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a, b, c \neq 0$.

Označi jedan kvadratić u svakom retku

	Vrijedi	***Ne vrijedi***
A. $a - b = b - a$	☐	☐
B. $a : b = b : a$	☐	☐
C. $(a + b) + c = a + (b + c)$	☐	☐
D. $(a - b) - c = a - (b - c)$	☐	☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se prepoznavanje ili direktna primjena svojstava računskih operacija zbrajanja, oduzimanja i dijeljenja u skupu $\mathbb{Z}$ na algebarske izraze. Jednakost pod A. vrijedi samo za $a = b$, dakle ne vrijedi općenito, što je zaključilo 81% ispitanika. Jednakost pod B. vrijedi samo za brojeve a i b za koje je $a^2 = b^2$, tj. za $a = \pm b$, pa ni ona općenito ne vrijedi, što je zaključilo 86% ispitanika. Jednakost pod C. vrijedi za sve $a, b, c \in \mathbb{Z}$, što je zaključilo 92% ispitanika. Jednakost pod D. ekvivalentna je s $(a-b)-c = (a-b)+c$, tj. s $c = -c$, što znači da vrijedi samo za $c = 0$, tj. ne vrijedi općenito, što je zaključilo 64% ispitanika. Prema tome, 36% ispitanika pripisalo je svojstvo asocijativnosti operaciji oduzimanja u skupu $\mathbb{Z}$.

Zadatak 2.3.5. (MFC412A, MFC412B)

Leo je želio pronaći tri uzastopna **PARNA** broja koja zbrojena daju broj 84. Napisao je jednadžbu $k + (k + 2) + (k + 4) = 84$.

(a) Što predstavlja slovo k?

Označi jedan kvadratić

A. Najmanji od tri uzastopna parna broja. ☐

B. Srednji od tri uzastopna parna broj. ☐

C. Najveći od tri uzastopna parna broja. ☐

D. Prosjek od tri uzastopna parna broja. ☐

(b) Koji od sljedećih izraza može predstavljati zbroj tri uzastopna **NEPARNA** broja?

Označi jedan kvadratić

A. $m + (m + 1) + (m + 3)$ ☐
B. $m + (m + 2) + (m + 4)$ ☐
C. $m + (m + 3) + (m + 5)$ ☐
D. $m + (m + 4) + (m + 6)$ ☐

Odgovor. U zadatku (a) od budućih se učitelja očekuje interpretacija jednadžbe u zadanom matematičkom kontekstu. Svaki paran broj veći je za 2 od svog parnog prethodnika. Ako je k najmanji od tri uzastopna parna broja, srednji od ta tri broja je broj $k+2$, dok je najveći od njih $k+2+2=k+4$. Dakle, točan odgovor je odgovor **A.** Postotak riješenosti ovog dijela zadatka bio je 56%. Uočimo da se tek rješavanjem postavljene jednadžbe i interpretacijom njenog rješenja može utvrditi je li postavljeni zadatak rješiv, budući da hipotetski rješenje jednadžbe može biti neparan cijeli broj ili čak razlomak. U drugom dijelu zadatku od budućih učitelja očekuje se interpretacija algebarskog izraza u zadanom matematičkom kontekstu, tj. prevođenje zapisa riječima u simbolički algebarski zapis. Svaki neparan broj veći je od svog neparnog prethodnika za dva. Ako je m najmanji od tri uzastopna neparna broja, onda je srednji od ta tri broja broj $m+2$, dok je najveći od njih broj $m+2+2=m+4$, pa je točan odgovor **B.** Ovaj dio zadatka točno je riješilo 51% ispitanika.

Zadatak 2.3.6. (MFC509)

Pred učenike koji uče algebru postavljeno je sljedeće pitanje:

Za neki broj n, što je veće, $2n$ *ili* $n + 2$*?*

Napišite odgovor uz obrazloženje.

Odgovor. Ovim zadatkom od budućih učitelja očekuje se postavljanje jednakosti i / ili nejednakosti te efikasno rješavanje jednadžbe i nejednadžbe u kontekstu cijelih brojeva. Kako bismo odredili što je veće, $2n$ ili $n+2$, potrebno je postaviti slijedeće (ne)jednadžbe: $2n > n+2, n+2 > 2n$ i $2n = n+2.$ Rješavanjem prve nejednadžbe oduzimanjem broja n objema njenim stranama, dolazimo do zaključka da je broj $2n$ veći od broja $n+2$ za sve cijele brojeve $n > 2$. Rješavanjem druge nejednadžbe oduzimanjem broja n objema njenim stranama, dolazimo do zaključka da je broj $n+2$ veći od broja $2n$ za sve cijele brojeve

$n<2$. Konačno, rješavanjem jednadžbe $2n=n+2$ oduzimanjem broja n objema njenim stranama, zaključujemo da su brojevi $2n$ i $n+2$ jednaki za $n=2$.

U nastavku dajemo kodnu tablicu prema kojoj su kodirani odgovori ispitanika. Njih 12% je točno riješilo ovaj zadatak, a 21% ispitanika zadatak je riješilo djelomično točno.

Tablica 2.10. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC509*

<table>
<tr><th>Kôd</th><th>Odgovor</th><th>Zadatak: MFC509</th></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Točan odgovor</td></tr>
<tr><td>20</td><td colspan="2">Točno opće rješenje napisano riječima ili korištenjem nejednakosti.
Primjeri:
• Točne nejednakosti ILI bez slučaja $n = 2$
Ako je $n > 2$, onda je $2n > n + 2$. Ako je $n > 2$, onda je $2n > n + 2$.
Ako je $n = 2$, onda je $2n = n + 2$. Ako je $n < 2$, onda je $2n < n + 2$.
Ako je $n < 2$, onda je $2n < n + 2$.

• Riječima, kao na primjer, „ $n + 2$ je veće ako je n manje od 2, a $2n$ je veće ako je n veće od 2.“</td></tr>
<tr><td>21</td><td colspan="2">Točno opće rješenje korištenjem grafa.

• Odgovori koji konstruiraju graf $y = n + 2$ i $y = 2n$ u (n, y) – ravnini i označavaju na grafu gdje je jedno veće od drugoga ILI zaključuju riječima da je $n + 2 > 2n$ ako je $n < 2$ i $2n > n + 2$ ako je $n > 2$.</td></tr>
<tr><td>22</td><td colspan="2">Točno, složeno, rješenje korištenjem konkretne vrijednosti.
Primjeri:
• Tablica (ili uzastopna lista uređenih parova) s vrijednostima za n i izračunima za $2n$ i $n + 2$ I zaključak iz tablice/liste da je je $n + 2 > 2n$ ako je $n < 2$ i $2n > n + 2$ ako je $n > 2$.
<table><tr><th>n</th><th>$2n$</th><th>$n+2$</th></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>6</td></tr></table>• „Tablica pokazuje da je $2n$ manje od $n + 2$ ako je n manje od 2 i da ja $2n$ veće od $n + 2$ ako je n veće od 2.“</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Djelomično točan odgovor</td></tr>
<tr><td>10</td><td colspan="2">Općeniti odgovori koji su na „dobrom putu“ ali nedovršeni ili su ograničeni u nekom smislu.
Primjer:
• Jedna nejednakost je točna, ali bez druge.
Na primjer, ako je $n > 2$, onda je $2n > n + 2$.
Na primjer, $2n$ je veće od $n + 2$ ako je n veće od 2.
• Dvije nejednakosti, ali samo jedna je točna.
Na primjer, ako je $n < 2$, onda je $2n > n + 2$ (netočno) i ako je $n > 2$ onda je $n + 2 < 2n$ (točno).</td></tr>
</table>

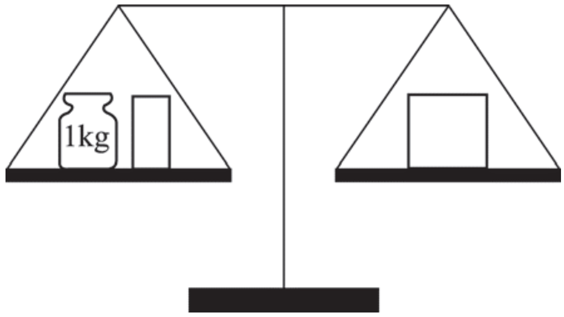
	Na primjer, ako je $n < 2$, $n + 2$ je veće (točno) i ako je $n > 2$, $n + 2$ je veće (netočno).
11	**Grafička rješenja** koja su na „dobrom putu“ ali nedovršena ili su ograničena u nekom smislu. *Primjer:* • Dva korektna grafa bez oznaka na grafu gdje je koji broj veći od drugoga ILI bez zaključka riječima da je $n + 2 > 2n$ ako je $n < 2$ i $2n > n + 2$ ako je $n > 2$. • Dva grafa, ali samo je jedan korektan. Zaključci i bilješke uz grafove moraju biti korektni za dane grafove.
12	**Rješenja s konkretnim vrijednostima** koja su na „dobrom putu“ ali nedovršena ili su ograničena u nekom smislu. *Primjer:* • Odgovori koji koriste metodu pokušaja i pogrešaka i više od jedne konkretne vrijednosti za n, ali ne poopćuju ih u iste kategorije kao što je pokazano pod kodom 20. • Odgovori koji kažu da ovisi o vrijednosti $\boldsymbol{n}$, s više od jednog popratnog primjera. Na primjer, „Ovisi. Ako je $n = 1$, $n + 2$ je veće, ako je $n = 5$, $2n$ je veće.“
	Netočan odgovor
70	Odgovori koji ukazuju: • Ne može se znati koje je veće, jer vrijednost od n nije poznata; ili • Ovisi o vrijednosti n, bez (ili sa samo jednim) popratnim primjerom ili bez valjanih argumenata.
71	Samo jedna korektna nejednakost i još dodatna greška. *Primjer:* • $2n > n + 2$ ako je $n > 1$ • $n + 2$ je veće od $2n$ ako je n jednako 1 ili manje (pretpostavlja da je n cjelobrojan)
72	Zaključci izvedeni na osnovi **samo jedne vrijednosti $\boldsymbol{n}$.** *Primjer: ako je $n = 10, 2n = 20$ i $n + 2 = 12$, onda je $2n > n + 2$*
73	Odgovori koji označavaju $2n$ bez korektne pripadne nejednakosti (na primjer bez *„ako je $n > 2$“*).
79	Ostalo netočno (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno.

2.3.3. Jednadžbe i nejednadžbe

U sljedećim zadacima od budućih se učitelja primarne razine obrazovanja očekuje poznavanje i korištenje modela vage jednakih krakova u ravnoteži kao modela koji se koristi pri uvođenju koncepata jednakosti i nejednakosti te koncepta nepoznanice, odnosno koncepata linearnih jednadžbi i nejednadžbi.

Zadatak 2.3.7. (MFC303)

Predmeti na vagi su u ravnoteži. Na lijevom kraku nalazi se uteg mase 1 kg i pola cigle. Na desnom kraku nalazi se cijela cigla.



Kolika je masa jedne cijele cigle?

Označi jedan kvadratić

A. 0.5 kg ☐

B. 1 kg ☐

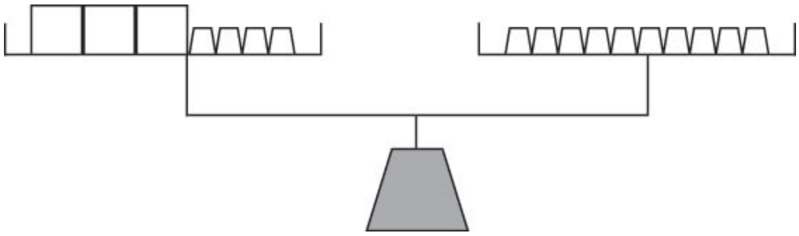
C. 2 kg ☐

D. 3 kg ☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko metodičko znanje vezano uz koncept jednakosti (vaga jednakih krakova u ravnoteži) i koncept nepoznanice (nepoznata masa) objedinjenih u konceptu jednadžbe. Od ispitanika se očekivalo interpretiranje slike modela vage u terminima jednadžbe te njeno rješavanje. Zadatak se rješava uklanjanjem jednakih masa na oba kraka vage u ravnoteži, tj. tako da se objema stranama jednakosti oduzme jednak broj. Masa jedne cijele cigle jednaka je ukupnoj masi pola cigle i utega od 1 kg. Ukoliko se cigla s lijeve strane prepolovi te se polovina cigla s lijeve i s desne strane vage uklone, vaga će i dalje biti u ravnoteži. Tada će na vagi s lijeve strane biti uteg od 1 kg, a s desne strane polovina cigle. Masa polovine cigle je 1 kg, odnosno masa cijele cigle je 2 kg. Točan odgovor je odgovor **C.** Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 82%.

Zadatak 2.3.8. (MFC312)

Ako B predstavlja masu (u gramima) svake kutije ( ), a uteg predstavlja masu od jednog grama, jednadžba $3B + 4 = 10$ može se prikazati na vagi jednakih krakova kao na slici.



Nejednadžba oblika $3B + 4 < 10$ ili $3B + 4 > 10$ bi na vagi bila prikazana tako da je jedan krak niži od drugog.

Gospodin Karlo se priprema za sat rješavanja jednadžbi i nejednadžbi.

Ako x predstavlja masu dane kutije, koji od sljedećih izraza ne može biti prikazan na vagi jednakih krakova?

Označi jedan kvadratić

A. $13 = 4x + 5$ ☐

B. $3x + 10 = 4$ ☐

C. $3x + 3 = 2x + 15$ ☐

D. $9 + 6x < 21$ ☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko metodičko znanje vezano uz koncept jednakosti i nejednakosti, prikazan fizičkim modelom vage jednakih krakova u (ne)ravnoteži. Od budućih se učitelja primarne razine obrazovanja očekuje svijest o ograničenosti modela vage pri modeliranju linearnih jednadžbi i nejednadžbi fizičkim modelom. Naime, masa predmeta je pozitivan broj, što znači da se na vagi mogu prikazati jednakosti i nejednakosti u kojima je nepoznata veličina pozitivna. Riješimo ponuđene jednadžbe i nejednadžbe A. – D. Prvo riješimo jednadžbu A. Oduzimanjem broja 5 objema stranama jednakosti i dijeljenjem dobivenog izraza brojem 4, dobije se vrijednost nepoznanice x:

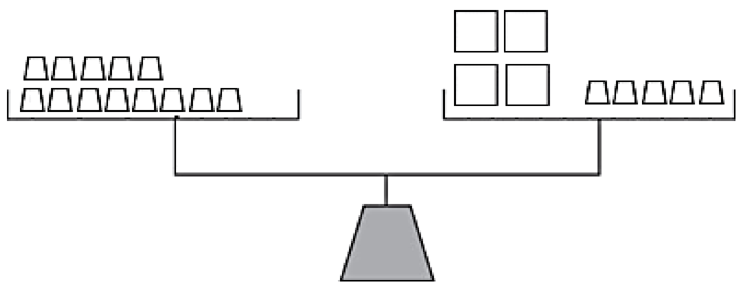
$$13 = 4x + 5 \,/ -5$$

$$\Leftrightarrow 13 - 5 = 4x + 5 - 5$$

$$\Leftrightarrow 8 = 4x \;/ : 4$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

Vrijednost nepoznanice *x* je pozitivan broj, pa se jednakost pod A. može prikazati na modelu vage jednakih krakova u ravnoteži, kao na Slici 2.23.



Slika 2.23. *Model vage 1*

Sređivanjem jednadžbe C. na analogan način, dobije se vrijednost nepoznanice *x*:

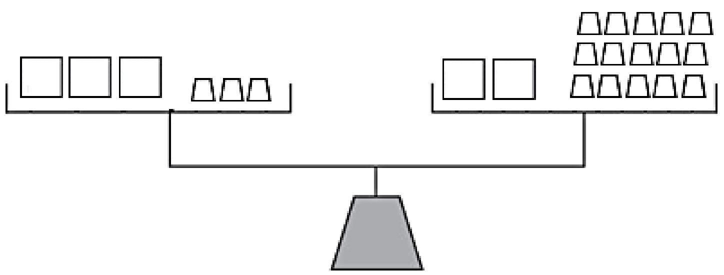
$$3x+3=2x+15\,/-3$$

$$\Leftrightarrow 3x+3-3=2x+15-3$$

$$\Leftrightarrow 3x=2x+12\,/-2x$$

$$\Leftrightarrow x=12.$$

pa je ova situacija prikaziva modelom vage (Slika 2.24.)



Slika 2.24. *Model vage 2*

Nejednadžba D. rješava se oduzimanjem broja 9 objema stranama zadane nejednakosti i dijeljenjem dobivenog izraza brojem 6:

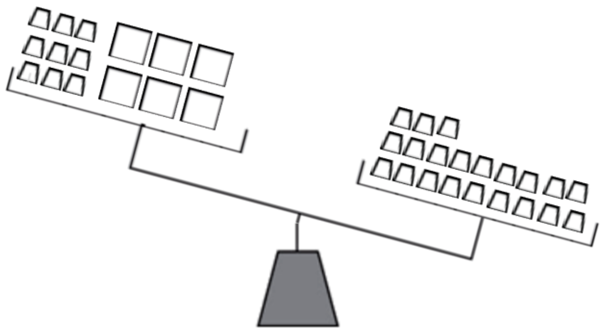
$$9+6x<21/-9$$

$$\Leftrightarrow 9-9+6x<21-9$$

$$\Leftrightarrow 6x < 12 / :6$$

$$\Leftrightarrow x < 2.$$

Tim se postupcima neće promijeniti nagnutost vage na desnu stranu. Nejednakost $x < 2$ također se može prikazati na modelu vage jednakih krakova kao na slici 2.24., no treba imati na umu da je vrijednost nepoznanice pozitivna pa je rješenje nejednadžbe u tom slučaju ekvivalentno s $0 < x < 2$.



Slika 2.25. *Model vage u neravnoteži*

Konačno, oduzimanjem broja 10 objema stranama jednakosti B. i dijeljenjem dobivenog izraza brojem 3, dobije se vrijednost nepoznanice *x*:

$$3x + 10 = 4$$

$$\Leftrightarrow 3x + 10 - 10 = 4 - 10$$

$$\Leftrightarrow 3x = -6 \;/ :3$$

$$\Leftrightarrow x = -2.$$

Budući da *x* nije pozitivan broj, on ne može predstavljati masu kutije, tj. postavljena jednadžba ne može se modelirati fizičkim modelom vage. Dakle točan je odgovor B. Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 56%. Iako nemamo uvid u distribuciju odgovora po distraktorima A., C. i D., moguće je da je ispitanike privukao odgovor D. jer je u njemu dana jedina nejednadžba među ponuđenim odgovorima (ostala 3 od 4 su jednadžbe).

2.4. Podatci i vjerojatnost

Sadržajna domena *Podatci i vjerojatnost* podijeljena je na poddomene *Prikazivanje i organizacija podataka*, *Čitanje i interpretiranje podataka* te *Vjerojatnost*. Objavljeni zadaci obuhvaćaju po jedan zadatak iz svake od poddomena. Oni koji ispituju matematičko metodičko znanje vezani su uz prikaz podataka piktogramom i stupčastim dijagramom, dok su zadaci koji ispituju matematičko sadržajno znanje vezani uz čitanje i interpretiranje podataka iz stupčastog dijagrama te primjenu osnovnog koncepta elementarnog događaja i vjerojatnosti.

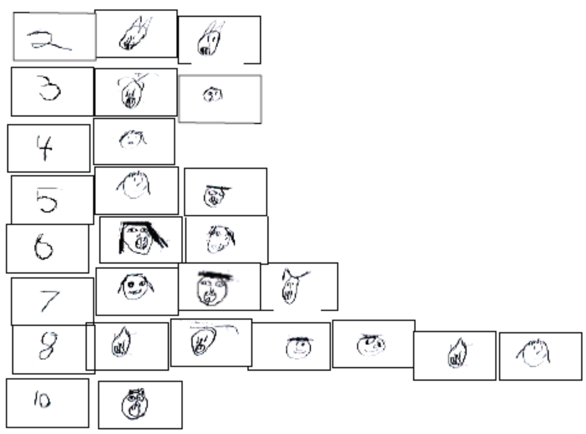
2.4.1. Prikazivanje i organizacija podataka

U sljedećem zadatku ispituje se matematičko metodičko znanje budućih učitelja primarne razine obrazovanja vezano uz analizu prikaza i organizacije podataka na danim dijagramima.

Zadatak 2.4.1. (MFC410)

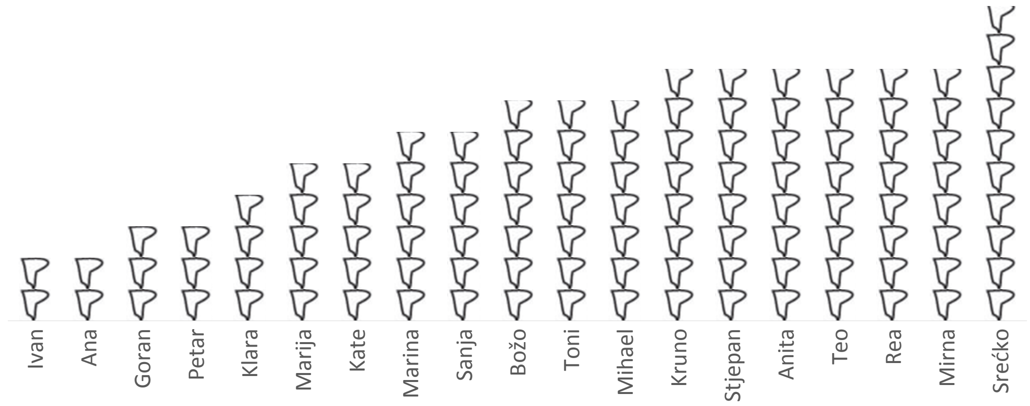
Zamislite da su dvije učenice iz istog razrednog odijela kreirale sljedeće dijagrame kako bi prikazale broj ispalih mliječnih zubi učenika njihovog razreda.[10]

Marija je na kartice nacrtala crteže svojih prijatelja i dobila sljedeći dijagram:



[10] Ovaj zadatak je korišten uz dozvolu autorice, Dr.Marie Alejandre Sorto, i temelji se na njenoj doktorskoj disertaciji, *Prospective middle school teachers' knowledge about data analysis and its application to teaching*, obranjenoj 2004. godine na Sveučilištu u Michiganu.

Sanja je izrezala slike zubiju i napravila ovakav dijagram:



Iz perspektive prikazivanja podataka, koje su sličnosti i razlike ovih dvaju prikaza?

Odgovor. Ovim se zadatkom ispituje matematičko metodičko znanje vezano uz vrednovanje učeničkih slikovnih prikaza podataka iz njima vrlo bliskog konteksta. Kako bi vrednovao učenički dijagram, učitelj ga mora interpretirati i analizirati, kao i usporediti kvalitetu, tj. informativnost slikovnih prikaza različitih učenika te razinu organizacije (grupiranja i redanja) njime prikazanih podataka. U tom je smislu napredniji slikovni dijagram (piktogram) prve učenice, Marije, jer su na njemu podaci kategorizirani prema broju ispalih mliječnih zubi i poredani u skladu s ovom kategorizacijom (od 2 do 10 ispalih zubi). Iz Marijinog dijagrama odmah je vidljivo da je najviše učenika izgubilo po 8 mliječnih zubi te da nema učenika s izgubljenih 0, 1, 9 i više od 10 mliječnih zubi. Dakle, u Marijinom piktogramu vidljive su frekvencije pojedinog broja izgubljenih zubi, kao i distribucije učenika prema tom kriteriju. S druge strane, dijagram druge učenice, Sanje, manje je informativan u statističkom smislu, no u njemu je dana preciznija informacija o svakom učeniku. Iz Sanjinog dijagrama ne mogu se direktno očitati frekvencije pojedinih brojeva ispalih zubi. Način vrednovanja odgovora ispitanika na postavljeno pitanje dan je u tablici 2.11. Korektne je odgovore dalo 29%, a djelomično korektne 38% ispitanika.

Tablica 2.11. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC410*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC410**
	Točan odgovor	
20	Odgovori koji ukazuju na **sličnosti** i **razlike** u predstavljanju podataka. *<u>Sličnosti:</u>* *Primjeri:* • Oba prikaza prikazuju iste podatke/isti broj ispalih mliječnih zubi	

	• Oba prikaza su slikovna. • Oba imaju oblik stupčastog dijagrama. • Oba su jednako uređena, od manjeg broja ispalih mliječnih zubi prema *većem.* *<u>Razlike:</u>* *Primjeri:* • Marija je grupirala podatke prema frekvencijama broja ispalih mliječnih zubi, dok Sanja nije. • U Marijinom dijagramu svaki stupac predstavlja broj ispalih mliječnih zubi, dok u Sanjinom dijagramu svaki stupac predstavlja jednog učenika i njegove ispale mliječne zube. • Marijin dijagram je kategoriziran po broju ispalih zubi, dok je Sanjin kategoriziran pojedinačno po osobama.
	Djelomično točan odgovor
10	Sličnosti su korektno navedene, razlike nekorektno, trivijalno ili nedostaju. <u>Sličnosti:</u> *Primjer:* • *Oba prikazuju jednak broj ispalih zubi.* <u>Razlike:</u> *Primjer:* • *Marijin prikaz je lakše razumjeti od Sanjinog.*
11	Razlike su korektno navedene, sličnosti nekorektno, trivijalno ili nedostaju. <u>Sličnosti:</u> *Primjer:* • Obje su nacrtale dijagram/grafikon.. (trivijalno) <u>Razlike:</u> *Primjer:* • Sanja je napravila stupac za svakog učenika dok je Marija napravila redak za svaki broj ispalih zubi.
	Netočan odgovor
70	Odgovori koji su nedovoljni ili trivijalni. <u>Sličnosti:</u> *Primjeri:* • Obje su napravile dijagram. • Oba dijagrama su o zubima. <u>Razlike:</u> *Primjer:* • Marija je koristila brojeve, Sanja nije. • Marijin je teže, Sanjin lakše očitati.
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak)
	Bez odgovora
99	Prazno

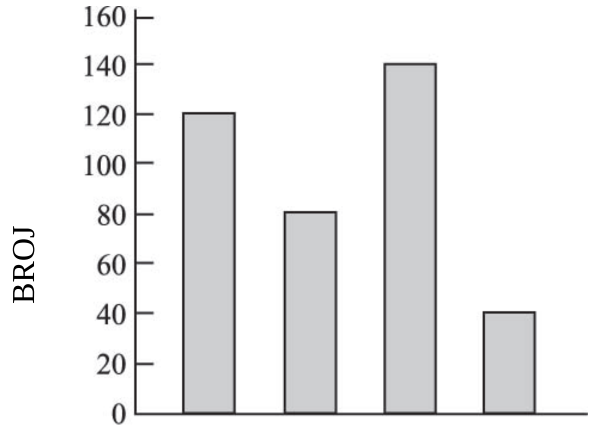
2.4.2. Čitanje i interpretiranje podataka

U zadatku koji slijedi od budućih se učitelja primarne razine obrazovanja očekuje sposobnost čitanja i interpretiranja podataka danih u stupčastom dijagramu.

Zadatak 2.4.2. (MFC502A, MFC502B)

Osnovnoškolcima je dan sljedeći zadatak:

Dijagram prikazuje broj olovaka, kemijskih olovaka, ravnala i gumica prodanih u trgovini tijekom jednog tjedna.



Na dijagramu nedostaju imena proizvoda. Najčešće prodavani proizvod bile su olovke. Gumica je prodano manje od bilo kojeg drugog predmeta. Prodano je više kemijskih olovaka nego ravnala.

(a) Koliko je prodano kemijskih olovaka?

Označi jedan kvadratić

A. 40 ☐

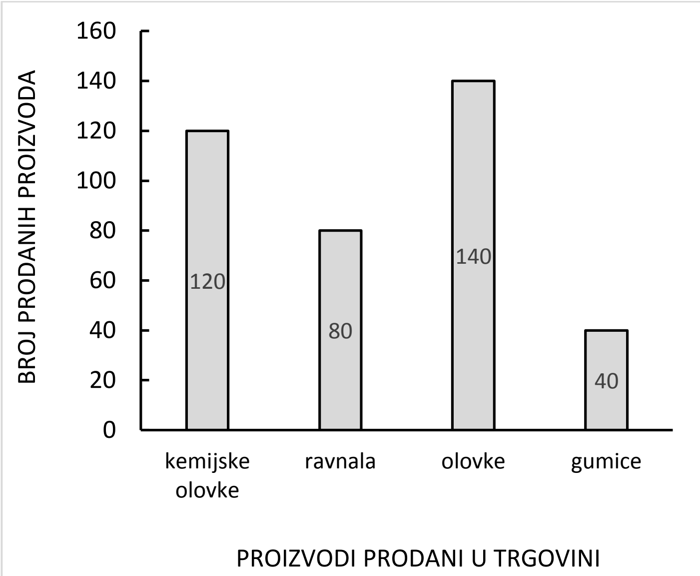
B. 80 ☐

C. 120 ☐

D. 140 ☐

(b) Neki učenici mogli bi imati poteškoća s ovakvim tipom zadatka. Koja je glavna poteškoća koja se može očekivati? Jasno objasnite, uz osvrt na problem.

Odgovor. Prvim dijelom zadatka ispituje se matematičko sadržajno znanje budućih učitelja primarnog obrazovanja vezano uz čitanje i interpretaciju podataka prikazanih stupčastim dijagramom te rečenicom iskazanom govornim jezikom. Pri rješavanju zadatka potrebno je rečenicu u kojoj su dani odnosi broja prodanih predmeta povezati s visinama stupaca dijagrama usporedbom njihove visine. Interpretirani stupčasti dijagram izgleda ovako:



Dakle, točan je odgovor C. Postotak riješenosti ovog dijela zadatka bio je 85%.
U drugom dijelu zadatka, od ispitanika se očekuje vrednovanje kognitivne složenosti postavljenog pitanja i njegovih elemenata u odnosu na učenike nižih razreda osnovne škole. Uočimo da stupci dijagrama nisu poredani po visini te da rečenica kojom se opisuje uređaj broja prodanih proizvoda pojedine vrste ne prati poredak stupaca. Uz to, u njenom se izričaju koriste relativni odnosi kao što su „najčešće“, „manje od bilo kojeg drugog“ i „više olovaka nego ravnala“. Upravo su to najvažniji čimbenici složenosti ovog zadatka.

Odgovor na drugi dio zadatka dan je u tablici 2.12. Postotak točnih odgovora bio je 23%, a postotak djelomično točnih 51%.

Tablica 2.12. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC502B*

Kôd	Odgovor	Zadatak: MFC502B
	Točan odgovor	
20	Odgovori koji se odnose na teškoće u čitanju i razumijevanju povezane sa **složenošću korištenog jezika** u pitanju, s **razlozima** i/ili **osvrtima na specifične primjere.** *Primjeri:* • *Upotrjebljeni jezik je prilično izazovan. Na primjer, izrazi „manje od bilo kojeg drugog“ i „više kemijskih olovaka nego ravnala“.*	

	• *Učenicima može predstavljati izazov (problem) težina/složenost fraza korištenih u pitanju, kao što su „najčešće“ ili „manje od“. U ovom zadatku velik je naglasak na učeničkim vještinama više razine, budući da se od njih zahtijeva organiziranje, interpretiranje, povezivanje riječi s dijagramom.* • *Proizvodi opisani u tekstu su navedeni drugačijim redoslijedom nego na stupcima dijagrama što stvara problem u nizanju i organizaciji podataka.*
	Djelomično točan odgovor
10	Manje detaljni odgovori koji prepoznaju da je poteškoća za djecu u jeziku ali **bez razloga i primjera.** *Primjer:* • *Imali bi problema s korištenim jezikom u pitanju.* • *Čitanje i razumijevanje teksta bilo bi teško za mnogu djecu.* • *Postoji poprilična količina podataka za pročitati, organizirati, poredati te povezati s dijagramom.*
11	Izjave koje povezuju teškoće povezane s dijagramom, a ne sa tekstom. *Primjer:* • *Imali bi problema čitati dijagram.* • *Nedostaju imena na dijagramu, a to nisu prije vidjeli.*
12	Izjave koje opisuju teškoće s razinom **vještina rješavanja problema** ili potrebnim **analiziranjem** bez objašnjavanja kako/zašto. *Primjer:* • *Imali bi problema analizirati podatke iz problema.* • *Problem zahtijeva vještine rješavanja problema i s time bi imali problema.*
	Netočan odgovor
79	Netočno (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno

2.4.3. Vjerojatnost

U sljedećem zadatku ispituje se matematičko sadržajno znanje vezano uz osnovni koncept vjerojatnosti elementarnog događaja.

Zadatak 2.4.3. (MFC106)

U vjerojatnosnoj igri Marija i Petar bacaju po dvije pravilne igraće kocke. Pravilna igraća kocka je kocka kojoj je zbroj točkica na dvjema nasuprotnim stranama jednak te bilježe brojeve na gornjoj strani svake od kocaka. Marija dobiva ako je razlika između dobivenih brojeva 0, 1 ili 2. Petar dobiva ako je razlika između dobivenih brojeva 3, 4 ili 5. Učenici raspravljaju je li igra poštena. Koja je od sljedećih izjava istinita?

Označi jedan kvadratić

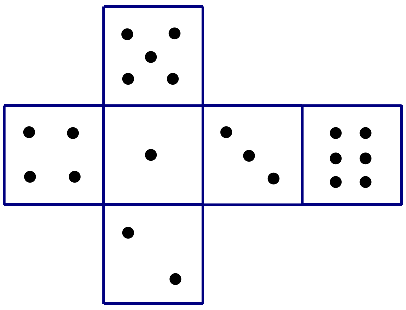
A. Oboje imaju jednaku šansu za pobjedu. ☐

B. Marija ima veću šansu za pobjedu. ☐

C. Petar ima veću šansu za pobjedu. ☐

D. Budući da igra uključuje numerirane kocke, nije moguće odrediti tko ima veću vjerojatnost za pobjedu. ☐

Odgovor. Ovim se zadatkom ispituje primjena osnovnih vjerojatnosnih koncepata u tzv. Laplaceovom modelu vjerojatnosnog prostora, tj. s konačnim brojem elementarnih događaja od kojih su svi jednako vjerojatni. Pri tome, igraću kocku zovemo pravilnom ako je zbroj točkica na svakom paru njenih nasuprotnih strana jednak 7. primjer jedne takve kocke dajemo na slici 2.26.



Slika 2.26. *Mreža pravilne igraće kockice*

U svakom bacanju takve kocke dobiju se dva broja iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dakle, prostor P elementarnih događaja čine parovi $P=\{(1, 1),(1, 2),...,(6, 6)\}$, što je ukupno 36 elementarnih događaja. Razlika većeg i manjeg broja u paru je broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Razlika većeg i manjeg broja u paru jednaka je nuli ako su brojevi u paru jednaki. Takvih je 6 parova: $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$. Razlika većeg i manjeg broja u paru je jedan ako su brojevi u paru susjedni brojevi. Takvih je 10 parova: $(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),$ $(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,5))$. Razlika većeg i manjeg broja u paru je broj 2 ako su brojevi u paru dva susjedna parna ili dva susjedna neparna broja, a takvih je 8 parova: $(1,3),(3,1),$ $(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)$. Od ukupno 36 mogućih elementarnih događaja, za Mariju je povoljno njih 6 + 10 + 8 = 24, a za Petra 36 – 24 = 12. Dakle, vjerojatnost da pobijedi Marija je $\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$, a da pobijedi Petar $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$. Stoga Marija ima veću šansu za pobjedu i igra nije pravedna. Točan odgovor je odgovor B. Postotak riješenosti ovog zadatka bio je 28%.

3. OBJAVLJENI ZADACI ZA BUDUĆE UČITELJE NIŽEG SEKUNDARNOG OBRAZOVANJA

Skupina objavljenih zadataka za buduće učitelje matematike u nižem sekundarnom obrazovanju, tj. u višim razredima osnovne škole sastoji se od 22 zadatka koji ispituju matematičko sadržajno znanje i 8 zadataka koji ispituju matematičko metodičko znanje. Svaki od 22 zadatka koji ispituju matematičko sadržajno znanje pripada jednoj od tri kognitivne razine: *Znanje* (6 zadataka), *Primjena* (8 zadataka), *Rasuđivanje* (8 zadataka), a svaki od 9 zadataka koji ispituju matematičko metodičko znanje pripada jednoj od dvije poddomene kurikuluma: *Planiranje* (5 zadataka), *Upotreba* (4 zadatka).

Zadaci su podijeljeni u skupine prema sadržajnoj domeni kojoj pripadaju: *Brojevi i operacije* (10 zadataka), Algebra i funkcije (12 zadataka), Geometrija i mjerenje (7 zadataka).

Zadatak u kojem je potrebno odrediti duljinu vrpce dviju kutija je zadatak koji se ponavlja iz prethodnog poglavlja pa ga u ovom poglavlju nećemo ponovno razmatrati. Potrebno je napomenuti da je u objavljenim zadacima za buduće učitelje u nižem sekundarnom obrazovanju ovaj zadatak svrstan u kognitivnu domenu *Rasuđivanje*, za razliku od objavljenih zadataka za buduće učitelje primarnog obrazovanja, gdje je spomenuti zadatak svrstan u kognitivnu domenu *Primjena*. Postotci riješenosti ovog zadatka također se razlikuju među budućim učiteljima koji se pripremaju za poučavanje u nižim i u višim razredima osnovne škole. Postotak ispitanika koji se pripremaju za poučavanje u nižim razredima osnovne škole te su točno, odnosno djelomično točno riješili ovaj zadatak, jednak je i iznosi 19%. S druge strane, 33% ispitanika koji se pripremaju za poučavanje u višim razredima osnovne škole točno je riješilo zadatak, dok je 20% njih djelomično točno riješilo zadatak.

Kao i u prethodnom poglavlju, tablice i slike koje su dijelovi teksta zadatka, nećemo posebno numerirati, a svaki zadatak je metodički objašnjen i riješen te je dan međunarodni prosjek njegove riješenosti, preuzet iz Tablice 3.1.

Tablica 3.1. *Objavljeni zadaci za buduće učitelje u nižem sekundarnom obrazovanju (predmetna nastava)*

ID zadatka	**Dimenzija znanja**	**Sadržajna domena**	**Poddomena**	**Opis**	**Oblik zadatka**	**Ključ**	**Maksimalan broj bodova**	**Međunarodni prosjek riješenosti**
MFC711	MSZ	Algebra i funkcije	Rasuđivanje	Dokazivanje tvrdnje o kompoziciji dviju funkcija.	KO	KT	2	11% (PT) 8% (DT)
MFC712A	MMZ	Algebra i funkcije	Kurikulum/ planiranje	Određivanje je li znanje potrebno za dokaz kvadratne formule.	SVI	1	1	78%
MFC712B	MMZ	Algebra i funkcije	Kurikulum/ planiranje	Određivanje je li znanje potrebno za dokaz kvadratne formule.	SVI	1	1	78%
MFC712C	MMZ	Algebra i funkcije	Kurikulum/ planiranje	Određivanje je li znanje potrebno za dokaz kvadratne formule.	SVI	1	1	49%
MFC712D	MMZ	Algebra i funkcije	Kurikulum/ planiranje	Određivanje je li znanje potrebno za dokaz kvadratne formule.	SVI	2	1	64%
MFC802A	MSZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Odlučivanje je li dani argument dokaz.	SVI	2	1	46%
MFC802B	MSZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Odlučivanje je li dani argument dokaz.	SVI	1	1	63%
MFC802C	MSZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Odlučivanje je li dani argument dokaz.	SVI	2	1	58%
MFC802D	MSZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Odlučivanje je li dani argument dokaz.	SVI	2	1	54%
MFC804	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Nalaženje 2 načina za odabir 2 učenika od 10 i 8 učenika od 10.	VI	3	1	35%
MFC808A	MSZ	Geometrija i mjerenje	Primjena	Vrednovanje učenikovih odgovora o simetričnim linijama u šesterokutu.	SVI	1, 2	1	70%
MFC808B	MSZ	Geometrija i mjerenje	Primjena	Vrednovanje učenikovih odgovora o simetričnim linijama u peterokutu.	SVI	1, 2	1	61%
MFC808C	MSZ	Geometrija i mjerenje	Primjena	Vrednovanje učenikovih odgovora o simetričnim linijama u rombu.	SVI	2, 1	1	53%
MFC604A1	MSZ	Algebra i funkcije	Primjena	Rješavanje zadatka riječima o linearnim vezama.	KO	KT	1	72%
MFC604A2	MSZ	Algebra i funkcije	Primjena	Rješavanje zadatka riječima o linearnim vezama.	KO	KT	1	50%
MFC604B	MMZ	Algebra i funkcije	Rasuđivanje	Analiziranje zašto je jedan zadatak riječima teži od drugog.	KO	KT	1	39%
MFC610A	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Određivanje je li broj iracionalan.	SVI	1	1	44%

ID zadatka	Dimenzija znanja	Sadržajna domena	Poddomena	Opis	Oblik zadatka	Ključ	Maksimalan broj bodova	Međunarodni prosjek riješenosti
MFC610C	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Određivanje je li broj iracionalan.	SVI	1	1	54%
MFC610D	MSZ	Brojevi i operacije	Znanje	Određivanje je li broj iracionalan.	SVI	3	1	37%
MFC703	MCK	Geometrija i mjerenje	Rasuđivanje	Dužina vrpce za dvije poklon kutije.	KO	KT	2	33 % (PT) 20 % (DT)
MFC704	MSZ	Geometrija i mjerenje	Primjena	Određivanje duljine dužine na liku.	KO	KT	2	32% (PT) 25% (DT)
MFC705A	MSZ	Geometrija i mjerenje	Znanje	Opisivanje rješenja jednadžbe u ravnini.	SVI	2	1	53%
MFC705B	MSZ	Geometrija i mjerenje	Znanje	Opisivanje rješenja jednadžbe u prostoru.	SVI	3	1	51%
MFC709A	MMZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Određivanje je li učenikov odgovor valjan dokaz.	SVI	1	1	75%
MFC709B	MMZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Određivanje je li učenikov odgovor valjan dokaz.	SVI	2	1	46%
MFC709C	MMZ	Brojevi i operacije	Rasuđivanje	Određivanje je li učenikov odgovor valjan dokaz.	SVI	2	1	60%
MFC710A	MSZ	Algebra i funkcije	Primjena	Određivanje može li se situacija modelirati eksponencijalnom funkcijom.	SVI	2	1	41%
MFC710B	MSZ	Algebra i funkcije	Primjena	Određivanje može li se situacija modelirati eksponencijalnom funkcijom.	SVI	2	1	39%
MFC710C	MSZ	Algebra i funkcije	Primjena	Određivanje može li se situacija modelirati eksponencijalnom funkcijom.	SVI	1	1	60%
MFC814	MSZ	Algebra i funkcije	Rasuđivanje	Određivanje je li tvrdnja o operaciji s matricama istinita i opravdanje odgovora.	KO	KT	2	19% (PT) 2% (DT)

3.1. Brojevi i operacije

Sadržajna domena Brojevi i operacije podijeljena je na poddomene *Prirodni brojevi*, *Razlomci i decimalni brojevi*, *Brojevni izrazi*, *Pravilnosti i veze*, *Cijeli brojevi*, *Omjeri, proporcije i postotci* i *Iracionalni brojevi*. Objavljeni zadaci obuhvaćaju tri zadatka iz poddomene *Prirodni brojevi* i jedan zadatak iz poddomene *Iracionalni brojevi*.

U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko metodičko znanje vezano uz prirodne brojeve, od budućih se učitelja matematike u višim razredima osnovne škole očekuje da znaju analizirati i interpretirati učeničke odgovore. U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko sadržajno znanje, od ispitanika se očekuje znanje i razumijevanje koncepta iracionalnih brojeva te primjena tog koncepta u geometriji.

3.1.1. Prirodni brojevi

Sljedećim zadacima ispituje se znanje vezano uz djeljivost prirodnih brojeva i Euklidov teorem o dijeljenju s ostatkom.

Zadatak 3.3.2. (MFC709A, MFC709B, MFC709D)

Učenicima viših razreda osnovne škole dan je zadatak u kojem trebaju dokazati sljedeću tvrdnju: *Umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je brojem 6.*

Slijede tri učenička odgovora.

Katarinin odgovor

Višekratnik broja 6 sadrži faktore 2 i 3. Od tri uzastopna broja, jedan će biti djeljiv s 3.
Također, bar jedan broj će biti paran, a svi parni brojevi su djeljivi brojem 2. Ako se množe tri uzastopna broja, umnožak mora imati barem jedan faktor 3 i jedan faktor 2.

Leonov odgovor

$$1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 6 \cdot 4$$
$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 20$$
$$6 \cdot 7 \cdot 8 = 6 \cdot 56$$

Marijin odgovor

n je bilo koji prirodni broj

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = (n^2+n) \cdot (n+2)$$
$$= n^3 + n^2 + 2n^2 + 2n$$

Poništavanjem n dobije se 1 + 1 + 2 + 2 = 6.

Za svaki od odgovora odredite daje li korektan dokaz tvrdnje.

	Označi jedan kvadratić u svakom retku	
	Korektan	***Nekorektan***
A. Katarinin dokaz	☐	☐
B. Leonov dokaz	☐	☐
C. Marijin dokaz	☐	☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko metodičko znanje vezano uz koncept djeljivosti prirodnog broja brojem 6 i koncept dokaza kao tipično matematičkog deduktivnog načina zaključivanja te vrednovanje učeničke argumentacije. Od budućih se učitelja matematike u višim razredima osnovne škole očekuje analiza i interpretacija danih učeničkih odgovora.

Prvo promotrimo Leonov odgovor. Uočimo da njegov odgovor demonstrira tipični način zaključivanja učenika osnovne škole, ujedno i najčešće korišten oblik otkrivanja općih zakonitosti, pravila i svojstava u nastavi matematike u osnovnoj školi. Otkrivanje se obično provodi analizom nekoliko konkretnih primjera u kojima se uočava analogija, nakon čega slijedi generalizacija bez provođenja formalnog, ili čak i neformalnog deduktivnog dokaza. Takvo zaključivanje nazivamo generalizacija nepotpunom indukcijom. Marijin odgovor ne sadrži matematički korektan opći dokaz dane tvrdnje iako njegov prvi dio sadrži korektan opći zapis umnoška triju uzastopnih prirodnih prirodnih brojeva u obliku $n(n+1)(n+2)$ te korektnu primjenu svojstava zbrajanja i množenja algebarskih izraza (komutativnost, asocijativnost i distributivnost) u složenoj situaciji s 3 faktora. Marija je navedeni izraz korektno zapisala u obliku zbroja monoma. Međutim, ta strategija ne vodi željenom zaključku. Zadnji dio njenog rada možemo interpretirati kao vrijednost izraza $n^3+n^2+2n^2+2n$ za $n=1$, tj. kao korektan zaključak u specijalnom, ali ne i općem slučaju. Konačno, Katarinin dokaz je valjan. Sastoji se od korektnih matematičkih činjenica koje vode glavnom zaključku.

Postotak ispitanika koji su točno odgovorili na A. dio zadatka je 75%, postotak onih koji su točno odgovorili na B. dio zadatka je 46%, a onih koji su točno odgovorili na C. dio zadatka 60%.

Zadatak 3.3.3. (MFC802A, MFC802B, MFC802C, MFC802D)

Potrebno je dokazati sljedeću tvrdnju:

„Ako se kvadrat bilo kojeg prirodnog broja podijeli brojem 3,

ostatak pri dijeljenju je 0 ili 1.“

Odredite vodi li neki od sljedećih pristupa matematički korektnom dokazu ove činjenice.

Označi jedan kvadratić u svakom retku

Da **Ne**

A. Koristi tablicu:

Broj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kvadrat broja	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Ostatak pri dijeljenju s 3	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

☐ ☐

B. Pokaži da je $(3n)^2$djeljivo brojem 3.
Ostali prirodni brojevi oblika su $3n\pm1$.
Njihov kvadrat je dan s $9n^2 \pm 6n + 1$,
što uvijek pri dijeljenju brojem 3
daje ostatak 1. ☐ ☐

C. Izaberi prirodni broj n, nađi njegov kvadrat n^2,
zatim provjeri vrijedi li tvrdnja. ☐ ☐

D. Provjeri tvrdnju za nekoliko prvih prostih brojeva,
a zatim izvedi zaključak temeljen na
osnovnom teoremu aritmetike. ☐ ☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko metodičko znanje vezano uz Euklidov teorem o dijeljenju s ostatkom, kao i primjena tipične strategije dokazivanja tvrdnji o djeljivosti, odnosno ostacima pri dijeljenju u skupu prirodnih brojeva. U odgovoru A. možemo uočiti ispravan i sustavan način razmišljanja o danoj tvrdnji, no on ne predstavlja njezin matematički potpun i korektan dokaz. Uočavamo da su u priloženoj tablici sustavno i organizirano ispisani svi prirodni brojevi od 1 do 10, njihovi kvadrati i ostatci pri dijeljenju tih kvadrata brojem 3. Uočava se da ti ostatci poprimaju samo vrijednosti 0 ili 1, no nakon toga nema upute o načinu dolaženja do općeg zaključka, iz čega možemo zaključiti da ovaj pristup podrazumijeva generalizaciju nepotpunom indukcijom, na temelju nekoliko primjera. Sličan pristup daje i C. no u njemu nema sustavnosti ni organiziranosti pokazane u pristupu A. Pristup C. najbliži je metodi pokušaja i promašaja.

Pristup B. matematički je korektna, mada ne i do kraja razrađena strategija koja vodi dokazu dane tvrdnje. U njoj je primijenjen Euklidov teorem o dijeljenju s ostatkom, prema kojem se svaki prirodni broj može zapisati u jednom od oblika $3n-1, 3n, 3n+1,$ za neko $n \in \mathbb{N}_0$. Nakon toga, primijenjena je metoda razlikovanja slučajeva te je za svaki od njih izvršeno kvadriranje. Njime se dobiva redom $(3n+1)^2 = 9n^2 + 6n + 1, (3n)^2 = 9n^2$ te $(3n-1)^2 = 9n^2 - 6n + 1,$ a treba još prokomentirati da je $9n^2 \pm 6n + 1 = 3 \cdot (3n^2 \pm 2n) + 1$ i $9n^2 = 3 \cdot (3n^2),$ pri čemu su $3n^2 \pm 2n, 3 \cdot (3n^2) \in \mathbb{Z},$ što znači da je kvadrat prirodnog broja oblika $3n$ djeljiv brojem 3, dok u slučaju prirodnog broja oblika $3n \pm 1$ kvadrat tog broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1. Na kraju, pristup D. daje pokušaj korištenja rastava prirodnog broja na proste faktore (osnovni teorem aritmetike), što nije produktivna strategija. Uočimo i da već prvi korak ovog pristupa upućuje na nepotpunu indukciju, što ne vodi korektnom deduktivnom dokazu. Postotak ispitanika koji su točno odgovorili na A. dio zadatka je 46%, na B. dio zadatka 63%, na C. dio zadatka 58% te na D. dio zadatka 54%.

Zadatak 3.3.4. (MFC804)

Razredni odjel ima 10 učenika. Ako bi se pri slučajnom odabiru iz tog razrednog odijela jednom prilikom izabrala 2 učenika, a zatim nekom drugom prilikom 8 učenika, koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

Označi jedan kvadratić

A. Postoji više načina za odabir 2 učenika nego za odabir 8 učenika. ☐

B. Postoji više načina za odabir 8 učenika nego za odabir 2 učenika. ☐

C. Broj načina za odabir 2 učenika jednak je broju načina za odabir 8 učenika. ☐

D. Nije moguće odrediti koji odabir ima više mogućnosti. ☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se osnovno matematičko kombinatorno znanje vezano uz osnovne principe prebrojavanja te uz koncept i svojstva binomnog koeficijenta. Za odabir 2 učenika od njih 10 postoji $\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\,8!}=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=45$ različitih načina, dok za odabir 8 učenika od njih 10 postoji $\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!\,2!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=45$ različitih načina odabira. Taj zaključak slijedi i direktno iz svojstva simetrije binomnog koeficijenta:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},\ n\in\mathbb{N}, k=1,\ldots,n,$$

za $n=10$ i $k=2.$ Dakle, broj načina za odabir 2 učenika od njih 10 jednak je broju načina za odabir 8 učenika od njih 10. Postotak ispitanika koji su točno riješili ovaj zadatak je 35%.

3.1.2. Iracionalni brojevi

U nastavku slijedi zadatak kojim se ispituje znanje vezano uz koncept iracionalnog broja π.

Zadatak 3.3.1. (MFC610A, MFC610B, MFC610D)

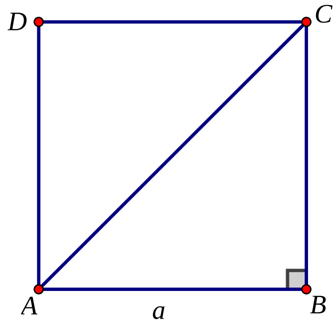
Odredite koje je od sljedećeg uvijek, ponekad ili nikad iracionalan broj.

Označi <u>jedan</u> kvadratić u <u>svakom</u> retku

	Uvijek	***Ponekad***	***Nikad***
A. Rezultat dijeljenja opsega kruga njegovim promjerom.	☐	☐	☐
B. Duljina dijagonale kvadrata stranice duljine 1.	☐	☐	☐
C. Rezultat dijeljenja brojeva 22 i 7.	☐	☐	☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko sadržajno znanje vezano uz koncept iracionalnog broja i taj se koncept povezuje s geometrijom, kako je to i uobičajeno u nastavnoj praksi u osnovnoj školi. Prvo pogledajmo tvrdnju A. Opseg O kruga promjera p dan je izrazom $O=p\cdot\pi.$ Rezultat dijeljenja opsega tog kruga njegovim promjerom jednak je $\frac{O}{p} = \frac{p \cdot \pi}{p} = \pi$. Budući da je π iracionalan broj, točan odgovor za A. dio zadatka je „Uvijek“, što je zaključilo 44% ispitanika.

Promotrimo tvrdnju B. Uzmimo kvadrat *ABCD* stranice duljine 1, kao na slici 3.1. Neka je $\overline{AC}$ dijagonala tog kvadrata.



Slika 3.1. *Kvadrat ABCD*

Primjenom Pitagorinog poučka na jednakokračan pravokutni trokut ΔABC, s katetama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ duljine 1, dobivamo da za duljinu d njegove hipotenuze vrijedi $d^2 = 1^2 + 1^2$, tj. $d^2 = 2$, što znači da je dijagonala jediničnog kvadrata duljine $d = \sqrt{2}$. Budući da je broj $\sqrt{2}$ iracionalan, točan odgovor na B. dio zadatka je „Uvijek“, što je uočilo 54% ispitanika.

Konačno, rezultat dijeljenja prirodnih brojeva 22 i 7 je razlomak $\frac{22}{7}$, koji pripada skupu racionalnih brojeva, pa je odgovor na C. dio zadatka „Nikad“, što je zaključilo 37% ispitanika. Možemo naslutiti da se razlog slaboj riješenosti ovog dijela zadatka nalazi činjenici da se dijeljenjem 22 : 7 dobije racionalan broj čiji je decimalni zapis beskonačan, što bi upućivalo da budući učitelji iracionalne brojeve poistovjećuju s beskonačnim decimalnim zapisima uz zanemarivanje svojstva (ne)periodičnosti tih zapisa.

3.2. Algebra i funkcije

Sadržajna domena *Algebra i funkcije* podijeljena je na poddomene *Geometrijski uzorci*, *Algebarski izrazi*, *Jednadžbe i nejednadžbe*, *Funkcije* i *Matrice*. Objavljeni zadaci obuhvaćaju dva zadatka iz poddomene *Jednadžbe i nejednadžbe* te po jedan zadatak iz poddomena *Funkcije* i *Matrice*.

U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko metodičko znanje, od budućih se učitelja matematike očekuje znanje vezano uz koncept linearne i kvadratne jednadžbe te uz koncept matematičkog dokaza.

U objavljenim zadacima koji ispituju matematičko sadržajno znanje očekuje se znanje vezano uz koncept (linearne) funkcije i operacije s funkcijama, uz Hadamardov (Schurov) produkt dviju matrica te uz primjenu eksponencijalne funkcije pri modeliranju situacija iz svakodnevnog života.

3.2.1. Prirodni brojevi

Sljedećim zadacima ispituje se matematičko sadržajno i metodičko znanje vezano uz postavljanje i rješavanje problemskih zadataka primjenom linearnih jednadžbi te uz dokazivanje formule za rješenja kvadratne jednadžbe.

Zadatak 3.1.1. (MFC604A1, MFC604A2, MFC604B)

(a) Sljedeći zadaci pojavili su se u udžbeniku iz matematike za 7. razred osnovne škole:

1. Petar, David i Ivan igraju se špekulama. Imaju ukupno 198 špekula. Petar ima 6 puta više špekula od Davida, a Ivan ima 2 puta više špekula od Davida. Koliko špekula ima svaki od njih?
2. Tri prijateljice Vesna, Josipa i Gabriela imaju ukupno 198 kovanica. Vesna ima 6 puta više kovanica od Josipe, a tri puta više kovanica od Gabriele. Koliko kovanica ima svaka od njih?

Riješite svaki zadatak.

(b) Učenicima sedmog razreda obično je drugi zadatak teži od prvoga. Navedite jedan razlog za razliku u razini težine.

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko metodičko znanje i matematičko sadržajno znanje vezano uz postavljanje i rješavanje problemskih zadataka te uz koncept linearne jednadžbe s jednom ili dvjema nepoznanicama. Postoji više metoda rješavanje ovih zadataka. Krenimo od prvog zadatka. Označimo slovom P broj špekula koje ima Petar, slovom D broj špekula koje ima David i slovom I broj špekula koje ima Ivan. Iz teksta zadatka slijedi da je broj špekula koje ima Ivan dvostruko, a broj špekula koje ima Petar šesterostruko veći od broja špekula koje ima David. To možemo zapisati kao $I = 2D, P = 6D.$ Ukupan broj špekula jednak je zbroju špekula svakog od njih i iznosi 198. Izjednačavanjem izraza $P+D+I$ s brojem 198 i uvažavanjem uočene ovisnosti broja Ivanovih i broja Petrovih špekula o broju Davidovih špekula, dobijemo broj špekula koje ima David:

$$P + D + I = 198$$

$$\Leftrightarrow 6D + D + 2D = 198$$

$$\Leftrightarrow 9D = 198$$

$$\Leftrightarrow D = 22$$

Dakle, David ima 22 špekule. Iz toga slijedi da je broj špekula koje ima Ivan jednak $I = 2 \cdot 22 = 44,$ dok je broj špekula koje ima Josip jednak $J = 6 \cdot 22 = 132.$ Ovaj zadatak iz (a) dijela točno je riješilo 72% ispitanika. Drugi zadatak iz (a) dijela rješava se na analogan način. Označimo slovom V broj kovanica koje ima Vesna, slovom J broj kovanica koje ima Josipa i slovom G broj kovanica koje ima Gabriela. Iz teksta zadatka slijedi da je broj kovanica koje ima Vesna šesterostruko veći od broja kovanica koje ima Josipa, a trostruko veći od broja kovanica koje ima Gabriela. To možemo zapisati u obliku $V = 6J = 3G,$ odnosno iz jednakosti $V = 6J$ slijedi $J = \frac{1}{6}V,$ a iz jednakosti $V = 3G$ slijedi $G = \frac{1}{3}V.$ Ukupan broj kovanica jednak je zbroju kovanica svake od njih i iznosi 198. Izjednačavanjem izraza $V + J + G$ s brojem 198 te uvrštavanjem gornjih jednakosti umjesto nepoznanica J i G dobijemo broj kovanica koje ima Vesna:

$$V + J + G = 198$$

$$\Leftrightarrow V+\frac{1}{6}V+\frac{1}{3}V=198$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}V=198\ /:\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow V=132.$$

Dakle, Vesna ima 132 kovanice. Iz toga slijedi da Josipa ima $J=132:6=22$, dok Gabriela ima $G=132:3=44$ kovanice. Ovaj zadatak točno je riješilo 50% ispitanika. Slijedi službena napomena iz TEDS – M istraživanja i kodne tablice 3.2. te 3.3. prema kojoj su bodovani odgovori ispitanika na (a) dijelove zadatka.

<u>Napomena uz odgovor</u>

Točan odgovor za prvi zadatak: David ima 22 špekule, Petar 132 i Ivan 44.

Točan odgovor za drugi zadatak: Vesna ima 132 kovanice, Josipa 22, a Gabrijela 44.

Pri bodovanju su razmatrane sljedeće metode:

<u>Metoda 1.</u> Korištenje jedne nepoznanice, postavljanje jedne jednadžbe i rješavanje.

Primjer za prvi zadatak: Neka je m broj špekula koje ima David. Tada Petar ima $6m$, a Ivan $2m$. Slijedi $6m+2m+m=198, m=22$.

<u>Metoda 2.</u> Korištenje više nepoznanica, postavljanje sustava jednadžbi, izvođenje supstitucije i rješavanje.

Primjer za prvi zadatak: Neka je p broj špekula koje ima Petar, d broj špekula koje ima David, a j broj špekula koje ima Ivan → $p=6d$, $j=2d, p+d+j=198$.

<u>Metoda 3.</u> Pokušaj i promašaj.

<u>Metoda 4.</u> Omjer ili druge aritmetičke metode.

<u>Metoda 5.</u> Prikaz/dijagram.

Tablica 3.2. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC604A1*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC604A1**
	Točan odgovor	
11	Odgovor korektno koristi Metodu 1 za rješavanje Zadatka 1 i dobiva korektno rješenje.	

12	Odgovor korektno koristi Metodu 2 za rješavanje Zadatka 1 i dobiva korektno rješenje.
13	Odgovor korektno koristi Metodu 3 za rješavanje Zadatka 1 i dobiva korektno rješenje.
14	Odgovor korektno koristi Metodu 4 za rješavanje Zadatka 1 i dobiva korektno rješenje.
15	Odgovor korektno koristi Metodu 5 za rješavanje Zadatka 1 i dobiva korektno rješenje.
19	Odgovor koristi valjanu, ali drugačiju metodu od prethodno navedenih za rješavanje Zadatka 1 i dobiva korektno rješenje.
	Netočan odgovor
70	Odgovor na Zadatak 1 koji koristi jednu od Metoda 1 – 5, ali dolazi do netočnog odgovora ili ne može doći do rješenja zbog pogreške u računu ili algebarske pogreške.
71	Odgovor koristi korektnu, ali drugačiju metodu od prethodno navedenih za rješavanje Zadatka 1, ali dolazi do netočnog odgovora ili ne može doći do rješenja zbog pogreške u računu ili algebarske pogreške.
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno

Tablica 3.3. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC604A2*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC604A2**
	Točan odgovor	
11	Odgovor koristi Metodu 1 za rješavanje Zadatka 2.	
12	Odgovor koristi Metodu 2 za rješavanje Zadatka 2.	
13	Odgovor koristi Metodu 3 za rješavanje Zadatka 2.	
14	Odgovor koristi Metodu 4 za rješavanje Zadatka 2.	
15	Odgovor koristi Metodu 5 za rješavanje Zadatka 2.	

19	Odgovor koristi valjanu ali drugačiju metodu od prethodno navedenih za rješavanje Zadatka 2 i dobiva korektno rješenje.
	Netočan odgovor
70	Odgovor na Zadatak 2 koji koristi jednu od Metoda 1 – 5, ali dolazi do netočnog odgovora ili ne može doći do rješenja zbog pogreške u računu ili algebarske pogreške.
71	Odgovor koristi korektnu ali drugačiju metodu od prethodno navedenih za rješavanje Zadatka 2, ali dolazi do netočnog odgovora ili ne može doći do rješenja zbog pogreške u računu ili algebarske pogreške.
79	Ostali netočni odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
11	Prazno

U (b) dijelu zadatka ispituje se matematičko metodičko znanje. Od budućih se učitelja matematike u višim razredima osnovne škole očekuje prepoznavanje i analiza elemenata zadanog zadatka te uočavanje poteškoća koje bi učenici mogli imati pri interpretaciji pojedinog dijela zadatka. Odabir osnovne nepoznanice iz teksta prvog zadatka u (a) dijelu ne podrazumijeva visoku razinu kognitivnog promišljanja jer je broj špekula koje imaju Ivan i Petar u direktnoj vezi (tj. direktno je ovisan) s brojem špekula koje ima David. S druge strane, odnos broja kovanica koje imaju Gabriela i Josipa nisu u direktnoj vezi pa je u drugom zadatku prevođenje tekstualnog zapisa u matematički zapis zahtjevniji proces. Naime, pri izražavanju preostalih dviju nepoznanica pomoću osnovne, pojavljuje se razlomački zapis, što bi učenicima moglo predstavljati problem pri računanju. Takve i slične odgovore dalo je 39% ispitanika. U nastavku dajemo kodnu tablice za (b) dio zadatka.

Tablica 3.4. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC604B*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC604B**
	Točan odgovor	
10	Razlozi koji jasno iznose razliku u matematičkoj ili kognitivnoj složenosti dvaju zadataka. Primjeri:	

	1) U prvom zadatku je lakše (u usporedbi s drugim zadatkom) izabrati osnovnu nepoznanicu i vidjeti odnose između nepoznanica. U prvom zadatku, broj špekula koje Petar i Ivan imaju u direktnoj je vezi s brojem špekula koje ima David. Ipak, u drugom zadatku, odnosi između broja kovanica koje imaju Josipa i Gabriela nije direktno naveden. 2) Drugi zadatak je sastavljen na način zbog kojeg je izglednije da će biti rješavan pomoću razlomaka nego pomoću cijelih brojeva. Razlomci mogu biti zahtjevniji pri rješavanju, računanje s razlomcima je podložnije greškama.
	Netočan odgovor
79	Nekorektni razlozi (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno

Zadatak 3.1.4. (MFC712A, MFC712B, MFC712C, MFC712D)

Nastavnik matematike svojim učenicima želi pokazati kako izvesti izraz za rješenja kvadratne jednadžbe. Odredite je li neko od sljedećih znanja potrebno za razumijevanje tog izvoda.

Označi jedan kvadratić u svakom retku

	Potrebno	**Nepotrebno**
A. Kako rješavati linearne jednadžbe.	☐	☐
B. Kako rješavati jednadžbe oblika $x^2 = k,\ k > 0$.	☐	☐
C. Kako nadopuniti izraz do potpunog kvadrata.	☐	☐
D. Kako zbrajati i oduzimati kompleksne brojeve.	☐	☐

Odgovor. U istraživanju TEDS – M ovaj je zadatak klasificiran u zadatke kojima se ispituje matematičko metodičko znanje, iako je za njegovo rješavanje nužno matematičko sadržajno znanje izvoda formule za rješenja kvadratne jednadžbe.

Neka je $ax^2+bx+c=0,\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ a\neq 0,$ po volji odabrana kvadratna jednadžba. Do izraza za njezina rješenja dolazi se sljedećim nizom ekvivalencija:

$$ax^2+bx+c=0\ /:a, a\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0 \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}=0 \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \qquad (4)$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (5)$$

$$\Leftrightarrow x_1+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\ \text{ ili } x_2+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow x_1=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\ \text{ ili } x_2=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \qquad (7)$$

$$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

U koraku (1) početna jednadžba je normirana. U koracima (2) i (3) izvodi se nadopunjavanje do potpunog kvadrata pa je za razumijevanje ovog izvoda potrebno znanje navedeno pod C. Postotak kandidata koji su došli do tog zaključka bio je 49%. Nadalje, u koracima (4), (5) i (6) objema stranama jednadžbe dodaje se ili oduzima neki izraz, što obuhvaća znanje rješavanja linearnih jednadžbi. Iz toga slijedi da je za razumijevanje ovog izvoda potrebno i znanje navedeno pod A., što je zaključilo 78% kandidata. Konačno, u koracima (6) i (7) traže se izrazi koji kvadrirani daju izraz $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$, za što je potrebno znati riješiti kvadratnu jednadžbu oblika $x^2=k, k>0$. Do tog je zaključka došlo 78% kandidata.

Dakle, da bi se razumio izvod formule za rješenja kvadratne jednadžbe, potrebno je znati A, B. i C., dok znanje D. nije potrebno. Korektan odgovor na D. dalo je 64% ispitanika.

3.2.2. Funkcije

Slijedi zadatak kojim se ispituje matematičko metodičko i sadržajno znanje vezano uz koncept funkcije i njezinog grafa te, posebno, koncept eksponencijalne funkcije.

Zadatak 3.1.2. (MFC710A, MFC710B, MFC710C)

Odredite koja se od sljedećih situacija može modelirati eksponencijalnom funkcijom.

Označi jedan kvadratić u svakom retku

	Da	**Ne**
A. Visina lopte h, t sekundi nakon što je bačena u zrak.	☐	☐
B. Iznos novca A u banci nakon t tjedana ako se svaki tjedan u banku stavi k kovanica.	☐	☐
C. Vrijednost automobila V nakon t godina ako mu se vrijednost smanjuje d% godišnje.	☐	☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko sadržajno znanje vezano uz koncept eksponencijalne funkcije i njegovu primjenu u kontekstualiziranim zadacima iz svakodnevnog života u kojima se pojavljuje eksponencijalno ponašanje. Odnos veličina čiji se rast ili pad može opisati eksponencijalnom funkcijom je multiplikativan. Zadana situacija A. opisuje kretanje lopte bačene u zrak. Kretanje lopte je složeno gibanje koje se sastoji od jednolikog usporenog gibanja i slobodnog pada. Uočimo da se visina lopte najprije povećava (bačena je s tla uvis), a nakon što dostigne svoju najveću visinu smanjuje se do nule (lopta padne na tlo). Dakle, funkcija visine *h* najprije raste, a zatim pada, što nije svojstvo niti jedne eksponencijalne funkcije jer je svaka eksponencijalna funkcija ili strogo rastuća ili strogo padajuća na svojoj domeni. Visinu lopte *h*, bačene u zrak početnom brzinom v_0, u ovisnosti o vremenu *t*, modeliramo kvadratnom funkcijom $h:\left[0,t_1\right]\to\mathbb{R}, h(t)=v_o\cdot t-\frac{gt^2}{2}$, gdje je g ubrzanje sile teže i iznosi približno $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, v_0 početna brzina kojom je lopta bačena, a t

vrijeme proteklo od početka gibanja lopte. Odgovor na pitanje A. je negativan, što je zaključilo 41% ispitanika.

Promotrimo sada situaciju B. Uočimo da je brzina promjene iznosa novca na računu u vremenu t konstanta i iznosi k kovanica. Prema tome, ovu situaciju modelira linearna funkcija $A:\left[0,+\infty\right\rangle, A(\mathrm{t}) = A_0 + kt,$ pri čemu je A_0 početni iznos novca na računu, t vrijeme u tjednima proteklo od polaganja novca u banku, a k je konstanta koja označava tjedni ulog kovanica. I na ovo pitanje odgovor je negativan, što je zaključilo 39% ispitanika.

Situacija C. opisuje eksponencijalno smanjenje vrijednosti automobila, i to za $d\% = \frac{d}{100}$ vrijednosti godišnje. Neka je V_0 početna vrijednost automobila, a V_n njegova vrijednost nakon n godina. Tada je $V_{n+1} = V_n - \frac{d}{100}\cdot V_n = \left(1-\frac{d}{100}\right)\cdot V_n, n \in \mathbb{N}_0$, tj. $V_n = \left(1-\frac{d}{100}\right)^n \cdot V_0$. Uočimo da izraz kojim je zadan opći član opisuje eksponencijalni pad pa ovu situaciju možemo modelirati eksponencijalnom funkcijom. Prema tome, kontinuirani model koji opisuje ovu situaciju bila bi funkcija zadana s $V(t) = a\cdot e^{bt}$, za neke $a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Znamo da je $V(0) = V_0$ iz čega slijedi da je $V(t) = V_0 \cdot e^{bt}$. Nadalje, $V(1) = \left(1-\frac{d}{100}\right)\cdot V_0$, tj. $V_0 \cdot e^b = \left(1-\frac{d}{100}\right)\cdot V_0$, odakle je $1-\frac{d}{100} = e^b$, odnosno $V(t) = \left(1-\frac{d}{100}\right)\cdot V_0 e^t$. Konačno, situacija C može se modelirati eksponencijalnom funkcijom, što je zaključilo 60% ispitanika.

Zadatak 3.1.3. (MFC711)

Dokažite sljedeću tvrdnju:

Ako se grafovi linearnih funkcija $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *zadanih s* $f(x) = ax+b$ i $g(x) = cx+d$, *sijeku u točki* P *na* x – *osi pravokutnog koordinatnog sustava, onda graf njihovog zbroja* $f+g$ *mora prolaziti točkom* P.

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko sadržajno znanje unutar kognitivne domene *Rasuđivanje*, vezano uz pojam funkcije i njezinog grafa, zbroja funkcije i interpretacije koordinata točaka koordinatnog sustava.

Dokažimo danu tvrdnju. Prvo uočimo da je ordinata svih točaka na x – osi jednaka nula pa se prema pretpostavci zadatka i grafovi zadanih linearnih funkcija sijeku u takvoj točki. Pretpostavimo da se grafovi funkcija f i g sijeku u točki $P(p,0)$, iz čega slijedi da je $f(p)=0$ i $g(p)=0$. Uvrštavanjem tih jednakosti u $(f+g)(p)$ slijedi da je $(f+g)(p)=f(p)+g(\mathrm{p})=0+0=0$. Dakle, graf funkcije $f+g$ prolazi točkom $P(p,0)$, čime je tvrdnja dokazana. Uočimo da ova tvrdnja vrijedi za sve funkcije $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, neovisno o njihovom pravilu pridruživanja pa je podatak o pravilu pridruživanja suvišan.

Ovaj zadatak točno je riješilo 11%, a djelomično točno 8% ispitanika, iz čega možemo zaključiti da koncept funkcije te proces formalnog deduktivnog dokazivanja predstavljaju problem budućim učiteljima matematike. U nastavku dajemo kodnu tablicu prema kojoj su se bodovali odgovori ispitanika.

Tablica 3.5. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC711*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC711**
	Točan odgovor	
20	Odgovor pažljivo izlaže korake dokaza u općenitom smislu, bez korištenja danih formula za $f(x)$ i $g(x)$. *Primjer: Pretpostavi se da se* $f(x)$ *i* $g(x)$ *sijeku u točki* $(p,0)$ *na x - osi.* *Tada je* $f(p)=0, g(p)=0$. *Slijedi* $(f+g)(p)=f(p)+g(p)=0+0=0$. *Stoga* $f+g$ *također prolazi točkom* $(p,0)$.	
21	Odgovor pažljivo izlaže korake dokaza koristeći dane formule za $f(x)$ i $g(x)$. *Primjer: Pretpostavi se da se* $f(x)$ *i* $g(x)$ *sijeku u točki* $(p,0)$ *na x-osi. Tada se mogu napraviti sljedeći zaključci:* *(1)* $f(p)=0\to ap+b=0\to p=-\frac{b}{a}$ *(2)* $g(p)=0\to cp+d=0\to p=-\frac{d}{c}$ *(3)* $f(p)=g(p)\to\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\to ad=bc$ *(4)* $f(p)=g(p)\leftrightarrow ap+b=cp+d\to-\frac{b+d}{a+c}$*;* *Budući da je* $(f+g)(p)=f(p)+g(p)$, *zajedno s dva ili više prethodno navedenih zaključaka može se pokazati da je* $(f+g)(p)=0$. *Stoga* $(f+g)(x)$ *također prolazi točkom* $(p,0)$.	
22	Odgovor pažljivo izlaže korake dokaza koristeći grafičke argumente.	

	Primjer: Prikazan je graf dva pravca koji se sijeku na x-osi. Pretpostavi se da se $f(x)$ i $g(x)$ sijeku u točki $(p, 0)$ na x-osi. Vrijednost od $(f+g)(x)$ je zbroj od $f(x)$ i $g(x)$ za svaki x. Ali za $x = p,\ 0 + 0 = 0$, stoga $f + g$ također prolazi točkom $(p, 0)$.
	Djelomično točan odgovor
10	Odgovor pokazuje slijed zaključaka o općenitim funkcijama bez korištenja danih formula za $f(x)$ i $g(x)$, ali načinjena je neka pogreška ili odgovor završava prije nego je dokaz dovršen. *Primjer: Razumije da je je $f(p) = 0, g(p) = 0$ i $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$, ali ne dolazi do činjenice da je $(f+g)(p) = 0$ i/ili zaključka da $(f+g)(x)$ također prolazi točkom $(p, 0)$.*
11	Odgovor pokazuje slijed zaključaka korištenjem danih formula za $f(x)$ i $g(x)$, ali načinjena je neka pogreška ili odgovor završava prije nego je dokaz dovršen. *Primjer: Izvodi jedan ili više zaključaka (1) - (4) pod kodom 21, također kaže $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (a+c)x + (b+d)$, također uspijeva pokazati da je $(f+g)(p) = 0$, ali postoji velika pogreška u logičkom rasuđivanju.*
12	Odgovor pokazuje slijed zaključaka o općenitim funkcijama koristeći intuitivne/grafičke dokaze, ali načinjena je neka pogreška ili odgovor završava prije nego je dokaz dovršen. *Primjer: Odgovor pokazuje grafički da $f(x)$ i $g(x)$ prolaze kroz istu točku na osi x, također ističe značenje funkcije zbroja, ali ne uspijeva zaključiti da i funkcija zbroja prolazi kroz istu točku.*
	Netočan odgovor
79	Netočne matematičke izjave i ostali netočan rad (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno.

3.2.3. Matrice

U sljedećem zadatku od budućih učitelja matematike očekuje se matematičko sadržajno znanje vezano uz Hadamardov (Schurov) produkt matrica.

Zadatak 3.1.5. (MFC814)

Neka je $A=\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} t & u \\ v & w \end{bmatrix}$ i $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ definirano s $A\otimes B=\begin{bmatrix} pt & qu \\ rv & sw \end{bmatrix}$. Vrijedi li sljedeća tvrdnja: *Ako je* $A\otimes B=0$, *onda je ili* $A=0$ *ili* $B=0$ *(gdje 0 predstavlja nulmatricu)*? Obrazložite svoj odgovor.

Odgovor. Ovim zadatkom provjerava se matematičko sadržajno znanje budućih učitelja viših razreda osnovne škole vezano uz koncept i primjenu svojstava Hadamardovog (Schurovog) produkta matrica. Pritom se Hadamardov (Schurov) produkt dviju matrica definira na sljedeći način:

Neka su $A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right]\in \mathrm{M}_{\mathrm{mn}}$ *dvije matrice. Hadamardov (Schurov) produkt matrica A i B, u oznaci* $A\otimes B$, *je matrica iz* M_{mn} *s elementima* $\left[\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\right]_{ij}=a_{ij}\cdot b_{ij}$, $i\in 1, ..., n,\ j\in 1, ..., m.$

Prema tome, kako je i navedeno u tekstu zadatka, za matrice $A=\left[a_{ij}\right]$, $B=\left[b_{ij}\right]$, *vrijedi*

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} pt & qu \\ rv & sw \end{bmatrix}.$$

Pretpostavimo da je $A\otimes B=\begin{bmatrix} pt & qu \\ rv & sw \end{bmatrix}=0.$ Tada vrijede sljedeće jednakosti:

$p=0$ ili $g = 0$

i

$r=0$ ili $s = 0$

i

$t=0$ ili $u = 0$

i

$v=0$ ili $w = 0.$

Iz toga zaključujemo da nije nužno da jedna od matrica A i B bude nulmatrica. U nastavku dajemo neke primjere matrica A i B, $A, B\neq\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, čiji je Hadamardov produkt jednak nulmatrici.

Primjer 1: $A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A\otimes B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$

Primjer 2: $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A\otimes B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$

Primjer 3: $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, A\otimes B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$

Primjer 4: $A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 200\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A\otimes B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$

Takvi i slični protuprimjeri bili su dovoljni za opovrgavanje polazne tvrdnje. Ovaj zadatak od budućih učitelja matematike u višim razredima osnovne škole zahtijeva veću razinu kognitivnog promišljanja, zbog čega je u ispitivanju TEDS – M svrstan u kognitivnu domenu *Rasuđivanje*.

Postotak ispitanika koji su ovaj zadatak riješili potpuno točno bio je 19%, a postotak onih s djelomično točnim odgovorima bio je 2%. U nastavku dajemo kodnu tablicu prema kojoj se bodovani odgovori ispitanika.

Tablica 3.6. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC814*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC814**
	Točan odgovor	
20	Odgovor ukazuje da je izjava neistinita (ili ne nužno istinita) i prilaže istinit (i korektan) protuprimjer. *Primjer:* *Ne, nije istina. Ako je* $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, *onda je* $A\otimes B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.	
21	Odgovor ukazuje da je izjava neistinita (ili ne nužno istinita) i prilaže **opći** opis protuprimjera koristeći se riječima. *Primjer: Pretpostavimo da su svi elementi u prvom stupcu matrice A jednaki 0 i svi elementi u drugom stupcu matrice B jednaki 0. Ako primijenimo operaciju definiranu u pitanju na matrice A i B, na kraju dobivamo nulmatricu.*	

	Napomena: Kao što je prikazano u prethodnom primjeru, iako odgovor ne ukazuje da drugi stupac matrice A i prvi stupac matrice B moraju imati nenul elemente, ovakav odgovor priznajemo kao točan.
29	Ostali točni odgovori.
	Djelomično točan odgovor
10	Odgovor ukazuje da je izjava neistinita (ili ne nužno istinita) i prilaže protuprimjer koji *nije dovoljno dobro* opisan.
	Netočan odgovor
70	Odgovor ukazuje da je izjava neistinita (ili ne nužno istinita), ali ne prilaže objašnjenje ili je objašnjenje neistinito.
71	Odgovor ukazuje da je izjava istinita.
79	Ostali neistiniti odgovori (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne odgovore ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno.

3.3. Geometrija i mjerenje

Sadržajna domena *Geometrija i mjerenje* podijeljena je na poddomene *Geometrijski likovi*, *Geometrijsko mjerenje* te *Analitička geometrija*. Objavljeni zadaci obuhvaćaju po jedan zadatak iz svake od poddomena.

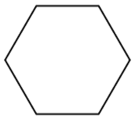
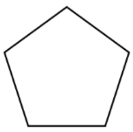
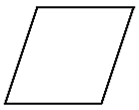
Objavljeni zadaci ispituju matematičko sadržajno znanje budućih učitelja matematike u višim razredima osnovne škole vezano uz svojstva simetrije geometrijskih likova, koncept paralelograma. Od budućih učitelja očekuje se vještina rješavanja geometrijskog problema analizom elemenata dane slike te interpretiranje dane linearne jednadžbe u koordinatnom sustavu na pravcu, u ravnini i u prostoru.

3.3.1. Geometrijski likovi

U sljedećim zadacima ispituje se matematičko sadržajno znanje budućih učitelja matematike u višim razredima osnovne škole vezano uz koncepte površine, simetrije pravilnih mnogokuta i danog četverokuta te uz koncept prostornog zora.

Zadatak 3.2.3. (MFC808A, MFC808B, MFC808D)

Učenici viših razreda osnovne škole uče simetriju. Dan im je zadatak u kojem za dani lik trebaju odrediti koliko ima osiju simetrije. Mihaelovi i Stjepanovi odgovori dani su u tablici. Označite je li odgovor učenika točan ili netočan.

		Učenici i njihovi odgovori o broju osiju simetrije	
Oblik	**Ime oblika**	**Stjepan**	**Mihael**
	pravilni šesterokut	**6** ☐ Točno ☐ Netočno	**12** ☐ Točno ☐ Netočno
	pravilni peterokut	**5** ☐ Točno ☐ Netočno	**10** ☐ Točno ☐ Netočno
	romb	**4** ☐ Točno ☐ Netočno	**2** ☐ Točno ☐ Netočno

Napomena: Ovaj zadatak složenog višestrukog izbora izvorno je činilo 6 zadataka za učenike. Nakon psihometrijske analize, prekodiran je u tri zadatka i bodovan na način kako slijedi.

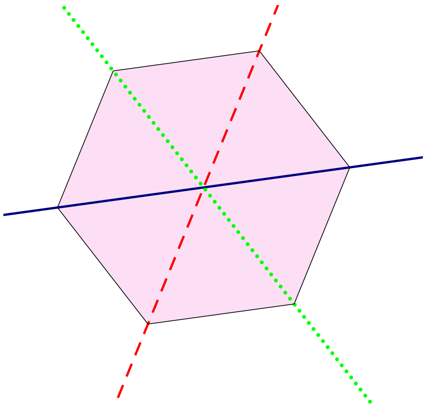
*MFC808A: Jedan bod ako su i Stjepan i Mihael točno označeni (*1 i 2*); inače 0 bodova.*

*MFC808B: Jedan bod ako su i Stjepan i Mihael točno označeni (*1 i 2*); inače 0 bodova.*

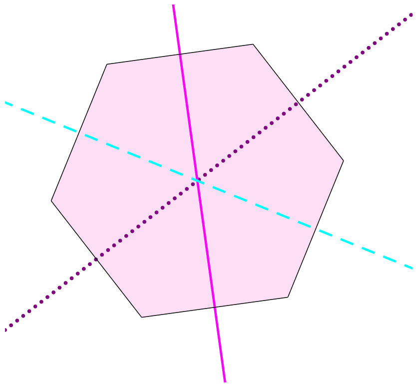
*MFC808C: Jedan bod ako su i Stjepan i Mihael točno označeni (*2 i 1*); inače 0 bodova.*

Postotci riješenosti bili su redom 70%, 61% i 53% redom.

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko sadržajno znanje budućih učitelja matematike u višim razredima osnovne škole vezano uz uočavanje i određivanje osiju simetrije danog geometrijskog lika. U zadatku su zadani pravilni šesterokut, pravilni peterokut i romb. Svaki pravilni n - terokut ima n osiju simetrije. Dakle, pravilni šesterokut ima 6 osiju simetrije: 3 osi koje sadrže glavne (tj. najdulje) dijagonale tog šesterokuta (Slika 3.2.) i 3 osi koje prolaze polovištima nasuprotnih stranica tog šesterokuta (Slika 3.3.), tj. simetrale parova stranica pravilnog šesterokuta.



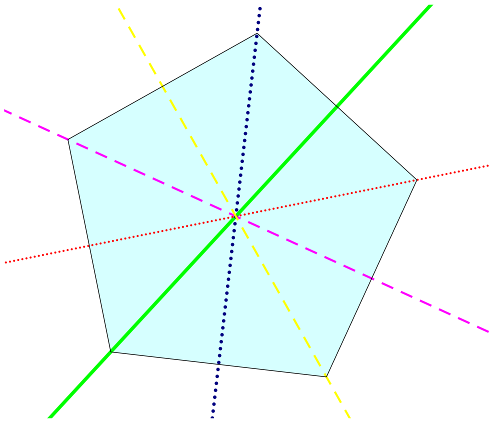
Slika 3.3. *Osi simetrije šesterokuta koje sadrže glavne dijagonale.*



Slika 3.2. *Osi simetrije pravilnog šesterokuta koje su simetrale parova nasuprotnih stranica šesterokuta.*

Iz toga je jasno da je Stjepanov zaključak točan, a Mihaelov netočan, što je uočilo 70% ispitanika.

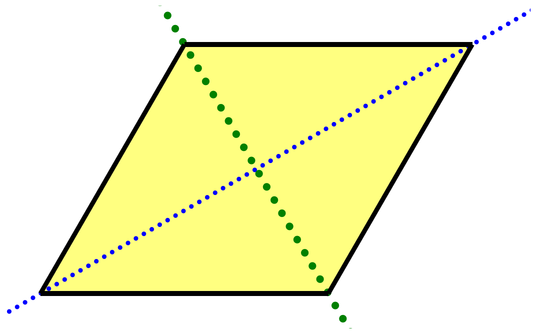
Nadalje, pravilni peterokut ima 5 osiju simetrije, od kojih svaka prolazi jednim vrhom i polovištem nasuprotne stranice tog peterokuta, što se može uočiti na slici 3.4.



Slika 3.4. *Osi simetrije pravilnog peterokuta*

Dakle, Stjepan je opet bio u pravu, dok je Mihael netočno odgovorio na postavljeno pitanje. Do ovog zaključka došlo je 61% ispitanika.

Konačno, opći romb ima 2 međusobno okomite osi simetrije prikazane na slici 3.5. Ovoga puta to je znao Mihael, dok Stjepan nije. Postotak ispitanika koji su uočili da romb ima 2, a ne 4 osi simetrije iznosi 53%.



Slika 3.5. *Osi simetrije općeg romba*

Uočimo da su postotci riješenosti danih zadataka u skladu s učestalošću pojavljivanja pravilnih šesterokuta i peterokuta te rombova u kurikulumu i nastavi matematike. Najčešće se pojavljuje pravilni šesterokut, a najrjeđe romb.

3.3.2. Geometrijsko mjerenje

Zadatak 3.2.1. (MFC704)

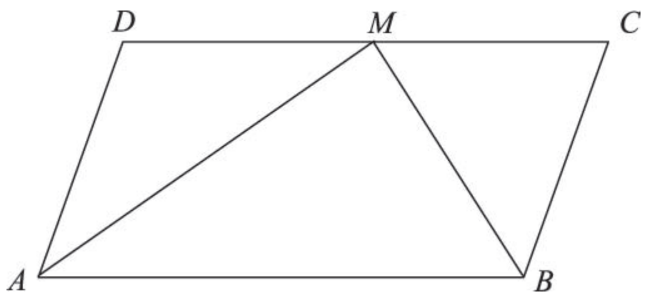
Na slici je paralelogram *ABCD*, pri čemu je $\measuredangle BAD = 60^\circ$, a *AM* i *BM* simetrale kutova $\measuredangle DAB$ i $\measuredangle ABC$ redom. Ako je opseg paralelograma *ABCD* 6 cm, odredite duljine stranica trokuta *ABM*.

Svoje odgovore napišite na prazne linije

$|AB| =$ __________

$|AM| =$ __________

$|BM| =$ __________.

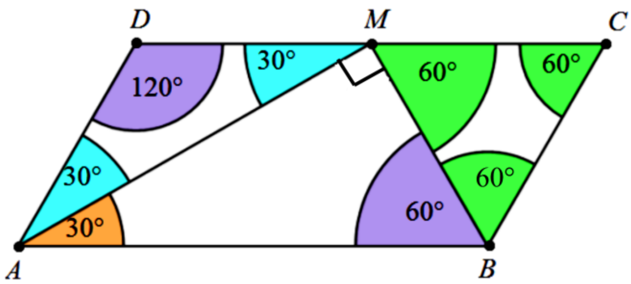


Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko sadržajno znanje vezano uz rješavanje geometrijskog problema analizom pojedinih elemenata dane slike uz prikladne oznake i popratnu argumentaciju. Kognitivna domena kojoj pripada ovaj zadatak je *Primjena*. U ovom zadatku primjenjuju se: definicija simetrale kuta, zbroj veličina kutova u trokutu te svojstva paralelograma.

Simetrala kuta je skup svih točaka jednako udaljenih od krakova tog kuta. Simetrala AM kuta $\measuredangle BAD$ dijeli taj kut na dva kuta $\measuredangle BAM$ i $\measuredangle MAD$ jednakih veličina, dakle $\measuredangle BAM = \measuredangle MAD = \frac{1}{2}\measuredangle BAD = 30^\circ$. Nasuprotni kutovi paralelograma jednakih su veličina iz čega slijedi da je $\measuredangle BAD = \measuredangle DCA = 60^\circ$. Nadalje, susjedni kutovi paraleleograma su suplementarni, što znači da je njihov zbroj jednak 180° pa je veličina kutova $\measuredangle ADC = \measuredangle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Simetrala BM kuta $\measuredangle ABC$ dijeli taj kut na dva kuta $\measuredangle ABM$ i $\measuredangle MBC$ jednakih veličina, dakle $\measuredangle ABM = \measuredangle MBC = \frac{1}{2}\measuredangle ABC = 60^\circ$.

Promotrimo sada veličine unutarnjih kutova trokuta AMD, BCM i ABM. U trokutu AMD poznate su nam veličine kutova $\measuredangle MAD = 30^\circ$ i $\measuredangle ADM = 120^\circ$. Budući da zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu iznosi 180°, lako se odredi veličina kuta $\measuredangle AMD$ kao $\measuredangle AMD = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

Analogno se odrede i veličine kutova $\measuredangle BMC$ i $\measuredangle AMB$ kao $\measuredangle BMC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, $\measuredangle AMB = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$. Iz svega navedenog, slijedi da je trokut AMD jednakokračan s osnovicom $\overline{AM}$, trokut ABM pravokutan s pravim kutom pri vrhu M, a trokut ΔBMC jednakostraničan, kao što je i prikazano na Slici 3.6.



Slika 3.6. *Paralelogram ABCD*

Dakle, $|AD| = |DM|$ i $|BC| = |MC| = |BM|$ pa zbog $|AD| = |BC|$ slijedi da je $|DM| = |MC|$. Prema tome, točka M je polovište dužine $\overline{DM}$ koja ima jednaku duljinu kao i dužina $\overline{AB}$. Iz toga slijedi da je $|DM| = |MC| = |MB| = \frac{|DM|}{2} = \frac{|AB|}{2}$.

Opseg paralelograma jednak je dvostrukom zbroju duljina njegovih susjednih stranica. U ovom slučaju, opseg O paralelograma jednak je $O = 2(|AB| + |BC|) = 6$ cm. Uvrštavanjem jednakosti $|BC| = \frac{|AB|}{2}$ u izraz za opseg paralelograma, dobijemo duljine stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$:

$$
\begin{aligned}
&2(|AB| + |BC|) = 6 \ / :2 \\
&\Leftrightarrow |AB| + |BC| = 3 \\
&\Leftrightarrow |AB| + \frac{|AB|}{2} = 3 \\
&\Leftrightarrow \frac{3|AB|}{2} = 3 \ / :3 \\
&\Leftrightarrow \frac{|AB|}{2} = 1 \ / \ \cdot 2 \\
&\Leftrightarrow |AB| = 2 \text{ cm} \Rightarrow |BC| = 3 - 2 = 1 \text{ cm.}
\end{aligned}
$$

Duljine dužina $\overline{MB}$ i $\overline{BC}$ su jednake , tj. $|MB| = |BC| = 1$ cm. Konačno, duljinu stranice $\overline{AM}$ izračunat ćemo primjenom Pitagorinog poučka na pravokutni trokut ΔABM :

$$
\begin{aligned}
&|AM|^2 = |AB|^2 - |BM|^2 \\
&\Leftrightarrow |AM|^2 = 4 - 1 \\
&\Leftrightarrow |AM|^2 = 3 \\
&\Leftrightarrow |AM| = \pm\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

odakle je $|AM| = \sqrt{3}$.

Zbog svega gore navedenog ovaj zadatak u istraživanju TEDS – M svrstan je u kognitivnu domenu „Primjena“. U nastavku dajemo kodnu tablicu prema kojoj su kodirani odgovori kandidata. Postotak točno riješenih zadataka bio je 32%, a postotak djelomično točno riješenih zadataka bio je 25%.

Tablica 3.7. *Kodna tablica za odgovore na zadatak MFC704*

Kôd	**Odgovor**	**Zadatak: MFC704**
	Točan odgovor	
20	Odgovori koji daju sve tri korektne vrijednosti: $|AB| = 2$ cm	

	$\|AM\| = \sqrt{3}$ cm ili korektna vrijednost $\|BM\| =$ 1 cm
	Djelomično točan odgovor
10	Bilo koje dvije korektne vrijednosti i jedna nekorektna (ili neodređena).
11	Bilo koja korektna vrijednost i dvije nekorektne (ili neodređena).
	Netočan odgovor
79	Nekorektne matematičke tvrdnje ili tvrdnje koje nemaju značenje (uključujući izbrisane, iskrižane, nečitljive, slučajne ili odgovore nevezane za zadatak).
	Bez odgovora
99	Prazno

3.3.3. Analitička geometrija

U sljedećem zadatku od budućih se učitelja matematike u višim razredima osnovne škole očekuje interpretacija jednadžbe u koordinatnom sustavu na pravcu, u ravnini i u prostoru. Kognitivna domena kojoj pripada ovaj zadatak je „Primjena“.

Zadatak 3.2.2. (MFC705A, MFC705B)

Poznato je da postoji samo jedna točka $T(x)$ na brojevnom pravcu čija koordinata zadovoljava jednadžbu $3x = 6$, i ona je $x = 2$.

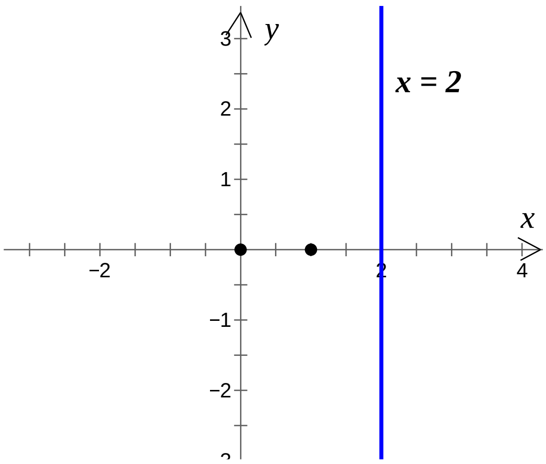
Pretpostavi da je ta jednadžba u ravnini, s koordinatama x i y, a zatim u prostoru s koordinatama x, y i z. Što predstavlja skup svih točaka koji zadovoljava jednadžbu $3x = 6$ u ravnini, a što u prostoru?

Označi jedan kvadratić u svakom stupcu

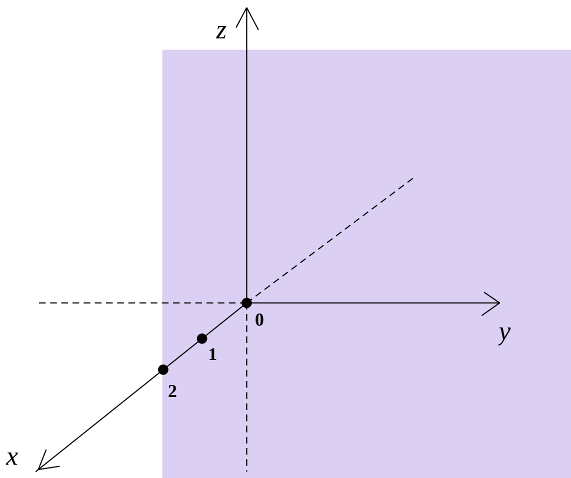
	Točka	*Pravac*	*Ravnina*	*Ostalo*
A. Rješenje jednadžbe $3x = 6$ u ravnini je	☐	☐	☐	☐
B. Rješenje jednadžbe $3x = 6$ u prostoru je	☐	☐	☐	☐

Odgovor. Ovim zadatkom ispituje se matematičko sadržajno znanje vezano uz geometrijsku interpretaciju linearne jednadžbe u koordinatnom sustavu na pravcu, u ravnini i u prostoru. Postavljena je jednadžba $3x = 6$ ekvivalentna s jednadžbom $x = 2$, a ona u ravnini predstavlja pravac paralelan s y – osi koji prolazi točkom s koordinatama $(2,0)$, što je prikazano na Slici 32. Točan odgovor na A. dio zadatka dalo je 53% ispitanika.

Slično, jednadžba $x=2$ u prostoru predstavlja ravninu koja je paralelna s yz ravninom i prolazi točkom s koordinatama $(2,0,0)$, kao na Slici 33. Točan odgovor na ovaj dio zadatka dalo je 51% ispitanika.



Slika 3.8. *Pravac* $3x=6$ *u ravnini*



Slika 3.7. *Ravnina* $3x=6$ *u prostoru*

Uočimo da je opći oblik (implicitne) jednadžbe pravca u ravnini $Ax+By+Cz=0\,(A,\,B,\,C\in\mathbb{R},\ A^2+B^2=0)$, a opći oblik jednadžbe ravnine u prostoru $Ax+By+Cz+D=0\,(A,\,B,\,C,\,D\in\mathbb{R},\ A^2+B^2+C^2+D^2\neq 0)$. U ovom je zadatku odabrana „krnja“ situacija u kojoj nedostaju neki pribrojnici, tj. s nekima od koeficijenata jednakima nuli. Upravo su takve jednadžbe učenicima najteže za interpretaciju i na njima treba posebno raditi.

LITERATURA

1. F. Brese, M. T. Tatto: *TEDS-M 2008 user guide for the international database*, IEA, Amsterdam, 2012.
2. J. Schwille, L. Ingvarson, R. Holdgreve-Resendez: *TEDS-M encyclopedia: A guide to teacher education context, structure, and quality assurance in 17 countries. Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M),* IEA, Amsterdam, 2013.
3. M. Carnoy, T. Beteille, I. Brodziak, P. Loyalka, T. Luschei: *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Do countries paying teachers higher relative salaries have higher student mathematics achievement?*, IEA, Amsterdam, 2009.
4. M.T. Tatto: *The Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS - M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries. Technical report*, IEA, Amsterdam, 2013.
5. M.T. Tatto, J. Schwille, S.L. Senk, L. Ingvarson, R. Peck, G. Rowley: *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework,* IEA, Amsterdam, 2008.
6. M.T. Tatto, J. Schwille, S.L. Senk, L. Ingvarson, G. Rowley, R. Peck, K. Bankov, M. Rodriguez, M. Reckase: *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M),* IEA, Amsterdam, 2012.

Web stranice

W1. International Association for the Evaluation of Educational Achievement, *Teacher Education and Development Study in Mathematics*, 2011., http://www.iea.nl/teds-m.html (preuzeto dana 3.8.2014.)

SAŽETAK

Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS – M) međunarodno je komparativno istraživanje studenata učiteljskih studija i nastavničkih studija matematike, kojemu je cilj utvrditi do koje su mjere pripremljeni za poučavanje matematike u nižim, odnosno višim razredima osnovne škole. Cilj tog istraživanja je i utvrditi varijacije u prirodi programa inicijalnog obrazovanja učitelja razredne nastave i nastavnika matematike unutar i medu državama sudionicama te njihov utjecaj na učenička matematička postignuća. TEDS – M istraživanje zasnovano je na rezultatima većeg broja međunarodnih komparativnih vanjskih vrednovanja matematičkih postignuća učenika osnovne i srednje škole (npr. TIMMS) koje provodi International Association for the Evaluation of the Educational Achievement (IEA). U radu su prezentirani metodologija i dizajn istraživanja TEDS – M te detaljno analizirana odabrana javno dostupna pitanja i zadaci postavljeni ispitanicima na tom istraživanju, kojima se utvrđuje razina njihovog matematičkog i metodičkog znanja. Uz zadatke i pitanja višestrukog izbora, detaljno su analizirani i na njih ponuđeni pogrešni odgovori, tzv. distraktori, dok je za zadatke konstruiranog odgovore prezentirana i pojašnjena i pripadna kodna tablica u istraživanju već klasificiranih dobivenih ispitaničkih odgovora.

SUMMARY

Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS - M) is an international comparative study on students who are studying teachers study and teaching of mathematics, which aims to determine to what extent they are prepared to teach mathematics in lower or higher grades. The aim of this research is to determine the variation in the nature of the program of initial education of primary teachers and mathematics teachers within participating countries and their impact on students mathematical achievement. TEDS - M research is based on the results of a number of international comparative external evaluationS of mathematical achievement of students in primary and secondary schools (eg. TIMMS) conducted by the International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). The aim of this paper is to present the methodology and design of the TEDS - M research and thoroughly analyze selected publicly available questions and tasks set respondents in this survey, which determines the level of their mathematical and methodological knowledge.

ŽIVOTOPIS

Rođena sam 17.8.1989. u Dubrovniku. Pohađala sam prvih šest razreda osnovne škole „Cavtat“ u Cavtatu, a preostala dva razreda osnovne škole „Ivan Gundulić“ u Dubrovniku. Osnovnu školu završila sam 2004. godine. Potom sam upisala jezičnu gimnaziju u „Gimnaziji Dubrovnik“ u Dubrovniku te ju završila 2008. godine. Te godine upisala sam Preddiplomski studij nastavničkog smjera matematike na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu i završila ga 2012. godine. Nakon toga sam upisala diplomski studij nastavničkog smjera matematike.